



PREMIOS DEFENSA 2013
TRABAJOS SELECCIONADOS

TRABAJOS DE ESTUDIO E
INVESTIGACIÓN

*COMPENSACIÓN DE UNA RED
GEODÉSICA LIBRE*

FRANCISCO CUADRA CASAS



PREMIOS DEFENSA 2013
TRABAJOS SELECCIONADOS

TRABAJOS DE ESTUDIO E
INVESTIGACIÓN

*COMPENSACIÓN DE UNA RED
GEODÉSICA LIBRE*

FRANCISCO CUADRA CASAS

Tesina

Compensación de una red geodésica libre

Modalidad de investigación
Categoría: Trabajo de investigación

Premios Defensa 2013

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Marco teórico	1
1.2. Objetivos	2
1.2.1. Objetivo general	2
1.2.2. Objetivos específicos	2
1.2.3. Planteamiento general del trabajo	2
2. Antecedentes	5
2.1. Definición de red geodésica libre	5
2.2. Aplicaciones	8
2.3. Rango de la matriz de diseño de una red geodésica libre	9
2.4. Unicidad de la matriz pseudoinversa	10
2.4.1. Demostración de la unicidad de la pseudoinversa	10
2.4.2. La matriz inversa cumple las condiciones de Moore-Penrose	11
2.4.3. La matriz pseudoinversa en sistemas de ecuaciones lineales	11
2.4.4. Conclusiones	17
2.5. Diferentes formas de calcular la matriz pseudoinversa	17
2.5.1. Cálculo basado en la matriz de constreñimientos	18
2.5.2. Descomposición LU	25
2.5.3. Descomposición de Cholesky	29
2.5.4. Descomposición en valores singulares (DVS)	32
2.6. Determinación de la matriz de costreñimientos	37
2.6.1. Redes tridimensionales	43
2.6.2. Redes planimétricas	46
2.6.3. Redes altimétricas	48
2.6.4. Método algebraico	49
2.7. Parámetros de error de una red geodésica libre	51
2.7.1. Error medio cuadrático de una observación aislada	51
2.7.2. Matriz de varianzas-covarianzas	54

2.7.3. Figuras de Error	55
2.8. Defecto de rango en redes libres	57
3. Material y metodología	63
3.1. Material	63
3.1.1. Material Topográfico	63
3.1.2. Software	64
3.2. Metodología	64
3.2.1. Proyecto de Campo	64
3.2.2. Observación	64
3.2.3. Cálculos previos	66
3.2.4. Planteamiento estocástico: Pesos	74
3.2.5. Planteamiento de ecuaciones de observación	77
4. Resultados	79
4.1. Resolución por 4 diferentes métodos	79
4.1.1. Resolución empleando matriz de constreñimientos	79
4.1.2. Resolución por descomposición LU de la matriz de criterio N	82
4.1.3. Resolución por descomposición de Cholesky de la matriz de criterio N	86
4.1.4. Resolución por descomposición en valores singulares (DVS) de la matriz de criterio N	89
4.2. Análisis estocástico inicial a posteriori	92
4.3. Error de los parámetros ajustados a posteriori	93
4.4. Elipses absolutas de error	95
4.5. Comparación con las coordenadas originales	98
4.6. Transformación entre sistemas de coordenadas	99
5. Conclusiones	105
5.1. Objetivos cumplidos	106
5.1.1. Objetivo general	106
5.1.2. Objetivos específicos	106
Apéndices	111
A. Modelo matemático de ecuaciones de observación	111
A.1. Nomenclatura del modelo de Ecuaciones de Observación	112
A.2. Modelo funcional de ecuaciones de observación	113
A.3. El modelo estocástico de ecuaciones de observación	114

A.3.1. La hipótesis de Gauss-Markov	114
A.3.2. El espacio vectorial de observaciones	114
A.3.3. La métrica en el espacio de observaciones	114
A.3.4. Consecuencias de la hipótesis de Gauss-Markov . . .	116
A.3.5. Matriz de varianzas-covarianzas de t	116
A.4. La condición de mínimo en ecuaciones de observación . . .	117
A.4.1. Valores estimados: sistema de ecuaciones normales .	117
B. Ley de propagación de las varianzas-covarianzas	119
C. Mejor estimación en sistemas compatibles indeterminados	121
D. Algunas propiedades de la traza y la esperanza matemática	123
E. Fórmula de la transmisión de errores	125
 Bibliografía	 127

Índice de figuras

2.1.	Ejemplo de red de 4 vértices.	59
2.2.	Defecto de rango desde el punto de vista geométrico. . . .	60
3.1.	Croquis inicial con las visuales materializadas entre cada punto de la red.	65
4.1.	Croquis de las elipses absolutas de error.	97

Índice de cuadros

3.1. Observaciones de campo.	67
3.2. Coordenadas previas (ETRS89).	68
3.3. Datos geodésicos de los puntos donde se midió distancia (Elipsoide GRS80).	73
3.4. D_{UTM} a partir de los datos.	73
3.5. emc, s en las distancias.	75
3.6. Vector de observaciones l	77

Apartado 1

Introducción

1.1. Marco teórico

En este trabajo se trata de establecer una teoría completa para la resolución de redes geodésicas libres. Este tipo de redes son aquéllas en las que, por diversos motivos que se detallarán a lo largo del texto, aparecen ciertos grados de libertad que impiden su resolución por los métodos ordinarios. Los fundamentos teóricos están recopilados esencialmente de las referencias [Sevilla, 2005] y [Chueca et al 1996].

La base de este estudio está en el ajuste, análisis, control y compensación empírica de redes. En la compensación de redes geodésicas aplicando el método de mínimos cuadrados (en adelante se hará referencia él como MMCC) ocurre a menudo que la matriz que define geoméricamente la red no es invertible por ser singular, por tanto, la red no es resoluble por métodos ordinarios y el problema se debe resolver mediante métodos algebraicos que se verán a lo largo del presente trabajo.

Los estudios teóricos deben complementarse con el manejo de instrumentación y la extracción de datos en campo, que proporcionan la base necesaria para el cálculo y el análisis posterior de los resultados. Es por ello que, en este trabajo, no sólo se ha planteado un estudio teórico completo sino también la aplicación práctica a un caso concreto de red geodésica con datos tomados en campo.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Profundizar en el procedimiento de resolución de redes geodésicas libres mediante el empleo de la denominada matriz seudoinversa.

1.2.2. Objetivos específicos

1. *Exponer los casos en los que se presentan redes geodésicas libres.*
2. *Diferenciar los tipos de redes geodésicas libres en función de los grados de libertad del sistema.*
3. *Definir las aplicaciones de las redes geodésicas libres.*
4. *Resolver de un ejemplo práctico de red geodésica libre.*
5. *Desarrollar y fundamentar matemáticamente 4 métodos de resolución de redes geodésicas libres.*
6. *Plantear la resolución de una red geodésica libre mediante esos 4 métodos.*
7. *Constatar que la solución del ajuste de la red es la misma independientemente del método elegido.*
8. *Verificar si en alguno de los puntos de la red hay algún error grosero y en su caso, proponer unas coordenadas mejoradas.*
9. *Comprobar la exactitud de las coordenadas de la red geodésica ejemplo.*

1.2.3. Planteamiento general del trabajo

El trabajo que se desarrollará a continuación se basa en el análisis de una red geodésica local. Las coordenadas de sus vértices geodésicos fueron calculadas por métodos de topografía clásica y con instrumentación cuya precisión se desconoce. En el presente estudio se tratará de averiguar si esas coordenadas son correctas, es decir, si están dentro del orden de precisión que proporciona la instrumentación empleada actualmente. Para ello, el estudio se realizará mediante la compensación de la red de forma libre, por lo tanto, suponiendo desconocidas las coordenadas de todos los vértices.

Finalmente, si los errores teóricos en las coordenadas están dentro del orden de precisión que proporciona la instrumentación, se concluirá que la red está correctamente calculada y que no son necesarios ajustes en sus coordenadas. Para revisarla con mayor exactitud se necesitaría, consecuentemente, instrumentación de mayor precisión.

Secuencia de acciones realizadas

La comunicación del objetivo principal del trabajo se realizó en fechas previas a la Navidad de 2011. En ese momento se tenía un conocimiento básico de la materia correspondiente a la resolución de redes geodésicas mediante métodos clásicos pero se desconocía el procedimiento que atañe a este estudio, es decir, la resolución mediante la matriz seudoinvertida.

Posteriormente se procedió a la recopilación de toda la información posible que tratase sobre el tema entre la que destacan los documentos [Sevilla, 2005], [Miguel Castro, 2004] entre otros. Finalmente se procedió a un estudio más detallado del libro [Chueca et al 1996] de donde se ha extraído una parte importante del desarrollo teórico.

Una vez adquirido el conocimiento teórico necesario para tratar el problema se procedió a recopilar un estudio sobre la red geodésica anteriormente citada, que en su momento fue resuelto como red ligada. Precisamente será en ese estudio con sus correspondientes datos de campo en el que se basará este trabajo para resolver la red aunque, esta vez, como red libre con las implicaciones que ya han sido descritas al inicio de este apartado.

A continuación se procederá a exponer todo el desarrollo matemático necesario para la resolución de una *Red Libre* para posteriormente aplicar los resultados obtenidos a un ejemplo práctico. En dicho ejemplo se realizarán los cálculos necesarios y el análisis de los mismos.

Apartado 2

Antecedentes

- Este tipo de trabajo ha sido tratado en el XXVI Curso de Geodesia por el Cte. Artillería GM. Óscar Luis Miguel Castro dentro de su trabajo académico dirigido denominado: *Compensación de redes libres. Solución con matriz seudoinversa* [Miguel Castro, 2004].
- Diferentes estudios y publicaciones.
- Es un tema muy desarrollado en la actualidad, siendo el método por excelencia empleado para la resolución de todo tipo de redes.

2.1. Definición de red geodésica libre

Como se ha dicho en la introducción, en la compensación de redes geodésicas aplicando el método de MMCC es frecuente encontrarse con modelos matemáticos que no pueden ser tratados de forma regular. Esto sucede por la imposibilidad de resolver el sistema de ecuaciones normales al ser su matriz singular, es decir, de determinante nulo. Estos casos, necesariamente, tienen que ser modelados mediante una red libre [Sevilla, 2005].

Para entender el significado matemático de lo que es una red libre hay que empezar por comprender el modelo matemático de ecuaciones de observación desarrollado en el apéndice A extraído de [De la Puente, 2011]. En adelante, la notación y las consecuencias que se deducen de dicho apéndice serán las que se empleen en el resto del texto.

La resolución de una red ligada se determina de forma determinista, donde se conoce un datum¹, y el modelo de Gauss-Markov determina una

¹Coordenadas de un punto de la red denominado *Punto Fundamental*, una distancia conocida y la orientación de la red en el sistema de coordenadas empleado.

única solución. En este caso la matriz de diseño N es de rango completo y se conoce la inversa en sentido clásico. Cuando esto ocurre, se cumple:

$$(A^T P A)^{-1} = N^{-1}$$

Es decir, existe esta inversa y la solución que hace mínima la suma de los cuadrados de los residuos (ver apéndice A) es:

$$x = (A^T P A)^{-1} A^T P t$$

Pero en ciertas redes no es posible especificar el sistema de referencia, o no interesa admitir que existan puntos fijos, lo que obliga a plantear modelos con defecto de rango.

El modelo linealizado sigue siendo igual, pero cuando se plantea obtener la inversa de la matriz de criterio $N = A^T P A$, es decir; $(A^T P A)^{-1} = N^{-1}$, NO EXISTE esta inversa en su sentido clásico.

Existen en este caso otras inversas, las *inversas generalizadas* y hay infinitas soluciones porque el sistema de ecuaciones normales resulta ser compatible indeterminado. De todas las inversas generalizadas hay una denominada *SEUDOINVERSA* que cumple la condición de mínimo exigida vista en el apartado A.4 del apéndice A, que minimiza $\|v\| = v^T P v$ y por ende $\|L - l\|$ y es insesgada, es decir que el sesgo $\beta = E[\hat{x}] - x$ es teóricamente nulo.

Si la matriz N no tiene inversa clásica, por ser deficiente de rango (lo que se deriva de la no determinación de la figura geométrica en cuanto a la fijación del origen de coordenadas, escala y dirección conocida), el sistema ha de resolverse mediante una inversa generalizada:

$$x = N^- d$$

La inversa generalizada N^- , por definición, es aquella matriz que verifica:

$$N N^- N = N$$

Dada una matriz N deficiente de rango, existen infinitas inversas generalizadas N^- y normalmente se preferirá aquella que dé una solución x de mínima norma, es decir:

$$\|x\|_{\text{mínimo}} = \left(x^T x \right)_{\text{mínimo}}$$

Esta matriz es única, como se demostrará en el apartado 2.4. Se trata de la llamada pseudoinversa, o inversa generalizada de Moore-Penrose. Es aquella matriz N^+ que verifica las **cuatro condiciones de Moore-Penrose**²:

1. $NN^+N = N$ (Condición de inversa generalizada)
2. $N^+NN^+ = N^+$ (Condición de inversa generalizada recíproca)
3. $NN^+ = (NN^+)^T$
4. $N^+N = (N^+N)^T$

El tratamiento es completamente análogo al caso de una red ligada, con la salvedad de que en vez de utilizar N^{-1} se usa N^+ . En el apartado 2.4 también se demostrará que N^{-1} es precisamente la pseudoinversa en sistemas de ecuaciones normales regulares.

La unicidad de esta matriz y el hecho de que proporcione la única solución que hace mínimo $\|x\|$ se demostrará, asimismo, en el apartado 2.4.

Otra alternativa al tratamiento puramente matemático para la obtención de la matriz pseudoinversa se da con la matriz de constreñimientos.

La utilización de la matriz de constreñimientos supone, de alguna manera, la adición de rango al sistema mediante una matriz que define los constreñimientos que le faltan. Dichos constreñimientos pueden ser todos o alguno de los siguientes datos:

- Origen.
- Escala.
- Orientación.³

La solución es la misma que cuando esta matriz se halla por procedimientos puramente matemáticos puesto que también se determina de forma que cumpla $\|x\|_{\text{mínimo}}$ o lo que es lo mismo, que cumpla las condiciones de Moore-Penrose.

²También conocidas como *Teorema de Moore-Penrose*. [Penrose, 1955]

³Por orientación se entiende la de la propia red en el sistema de coordenadas que se está empleando. No debe confundirse con la orientación en una determinada proyección; concepto empleado en cartografía.

2.2. Aplicaciones

- **Mejorar las coordenadas de puntos geodésicos de una red.**

Actualmente la técnica de observación para aplicaciones geodésicas (Basada principalmente en GNSS⁴) ha evolucionado tanto que en ocasiones la precisión conseguida es superior a la de los vértices de la red que se está observando. El método de resolución de redes libres independiza los errores cometidos en las observaciones de los errores en las coordenadas de los vértices. Consecuentemente, se podrá determinar los errores en las coordenadas de los vértices de una determinada red geodésica y mejorar sus coordenadas.

- **Analizar la influencia de errores exclusivamente en las observaciones.**

Como se ha dejado entrever en el epígrafe anterior, el método de resolución de redes libres trata de forma independiente las observaciones y las coordenadas de los vértices. Por lo tanto, en el planteamiento del problema, como ningún vértice de la red tiene que considerarse de coordenadas conocidas, se podrá hacer un estudio de errores basado exclusivamente en las observaciones.

- **Definir los sistemas de referencia.**

Una manera de definir los parámetros de un sistema de referencia es a partir de observaciones sobre los puntos que integran dicho sistema (*Marco de Referencia*). En estos casos se parte de unas coordenadas en un determinado sistema de referencia y se suponen aproximadas. Pues bien, a partir de esos parámetros aproximados, el ajuste de todos los puntos mediante el procedimiento de red libre, proporciona un nuevo sistema de referencia óptimo a partir de los observables.

- **Otras aplicaciones en el campo de la Geodesia.**

Aunque no será objeto de este estudio, las redes libres se emplean de forma profusa en otros campos de la Geodesia tales como Fotogrametría o GPS por ejemplo.

⁴Acrónimo GNSS: “Global Navigation Satellite System”, traducido al español: Sistemas Satélite de Navegación Global. Entre estos sistemas destacan GPS, GLONASS, COMPASS y GALILEO.

2.3. Rango de la matriz de diseño de una red geodésica libre

Se dice que una red geodésica es libre cuando la matriz de diseño que la define es deficiente de rango. Es decir, el rango de la matriz de diseño A es menor que el número de incógnitas n . Consecuentemente, la matriz de criterio N también será deficiente de rango:

$$Ax - t = v$$

En el sistema de ecuaciones normales:

$$(A^T P A)\hat{x} = A^T P t$$

la matriz

$$N = A^T P A$$

es deficiente de rango cuando:

$$R(N) < n < m$$

Asimismo, se define **defecto de rango** como:

$$n - R(A) = n - R(N)$$

En este caso el sistema de ecuaciones normales es compatible indeterminado y de las infinitas soluciones que presenta se trata de obtener la que minimice la norma de x : $\|x\|_{\text{mínimo}}$. Para que esto se cumpla habrá que imponer condiciones adicionales al sistema.

Como se demostrará en el apartado 2.4, la solución que minimiza $\|x\|$ es única y la matriz que hace posible esta solución es precisamente la pseudoinversa de N que se denota como N^+ . Es decir, aquella que cumple las condiciones de Moore-Penrose (apartado 2.1).

Consecuentemente, la mejor estimación insesgada o solución del ajuste será:

$$\hat{x} = N^+ A^T P t = N^+ d \quad (2.1)$$

Pero, ¿por qué y cuándo resulta ser deficiente de rango la matriz N ? Precisamente la respuesta a esto es la finalidad última de este trabajo y lo que se tratará de demostrar.

Una solución determinista queda definida geoméricamente de dos formas. Son los condicionamientos geométricos necesarios y suficientes denominados mínimos constreñimientos⁵. Dichos constreñimientos pueden presentarse de cualquiera de las 2 siguientes formas:

- Dos vértices fijos

O bien:

- Un vértice fijo, una dirección y una distancia conocidas.

Por lo tanto, una red libre será aquella que no cumpla todos estos condicionantes geométricos y en función del número de ellos que no satisfaga, así será su defecto de rango.

La estimación como aproximados de los datos de partida, conduce a que, al no existir ningún lado conocido de la red, ésta es desconocida en su magnitud, conociéndose solamente figuras semejantes a la verdadera. Por otra parte, la inexistencia de coordenadas fijas en ningún punto impide establecer unos ejes coordenados también fijos. El resultado es una *Red Libre*, geoméricamente indeterminada y, por lo tanto, con infinitas soluciones posibles.

En el apartado 2.6 se determinarán los diferentes defectos de rango de la matriz N en función del tipo de red de que se trate. Para cada uno de los casos, el problema geométrico se puede resolver diseñando una matriz de constreñimientos E que supla el defecto de rango de N . Es decir, con el mismo número de ecuaciones independientes que este defecto de rango. La matriz E se diseñará de forma lógica a partir de las coordenadas de partida (que se supondrán aproximadas) de los puntos de la red de modo que su configuración geométrica, su escala y sus ejes coordenados queden definidos.

2.4. Unicidad de la matriz seudoinversa

2.4.1. Demostración de la unicidad de la seudoinversa

Proposición. Dada una matriz N de coeficientes reales, su inversa generalizada de Moore-Penrose o seudoinversa es única.

⁵Pág. 227 de la referencia [Chueca et al 1996].

Demostración. Supóngase que la matriz N admite 2 pseudoinversas: P_1, P_2 ; evidentemente ambas matrices verificarán las 4 condiciones de Moore-Penrose descritas en el apartado 2.1. Por lo tanto, aplicando dichas condiciones:

1.

$$\begin{aligned} P_1 &= P_1 N P_1 = P_1 (N P_1)^T = P_1 P_1^T N^T = P_1 P_1^T (N P_2 N)^T = \\ &= P_1 P_1^T N^T P_2^T N^T = P_1 (N P_1)^T (N P_2)^T = P_1 N P_1 N P_2 = P_1 N P_2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P_2 &= P_2 N P_2 = (P_2 N)^T P_2 = N^T P_2^T P_2 = (N P_1 N)^T P_2^T P_2 = \\ &= N^T P_1^T N^T P_2^T P_2 = (P_1 N)^T (P_2 N)^T P_2 = P_1 N P_2 N P_2 = P_1 N P_2 \end{aligned}$$

Luego $P_1 = P_2$.

2.4.2. La matriz inversa cumple las condiciones de Moore-Penrose

Proposición. Si N es una matriz cuadrada de rango completo, la matriz inversa de N , N^{-1} , es la pseudoinversa de la matriz N .

Demostración. Evidentemente la matriz N^{-1} verifica las cuatro condiciones:

1. $NN^{-1}N = N$

2. $N^{-1}NN^{-1} = N^{-1}$

3. $NN^{-1} = (NN^{-1})^T = I$

4. $N^{-1}N = (N^{-1}N)^T = I$

2.4.3. La matriz pseudoinversa en sistemas de ecuaciones lineales

A continuación se tratará de abordar el problema de la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales por medio de las inversas generalizadas, para lo cual es necesario introducir el concepto de sistema compatible.

Definición. Sea A una matriz de coeficientes reales de m filas y n columnas, donde generalmente $m \neq n$. El sistema de ecuaciones lineales $Ax = t$

es compatible si existe al menos un vector x_0 que satisface el sistema de ecuaciones lineales.

Proposición. Sea A una matriz de coeficientes reales de n filas y m columnas y A^+ una matriz de m filas y n columnas que verifica: $A = AA^+A$. Entonces:

1. El sistema de ecuaciones lineales $Ax = t$ es compatible $\Leftrightarrow AA^+t = t$
2. La solución general de un sistema lineal compatible indeterminado $Ax = t$ es:

$$\boxed{x = A^+t + (I - A^+A)z} \quad (2.2)$$

donde z es un vector arbitrario.

Demostración. Si $Ax = t$ es compatible, existirá un vector x_0 que satisface el sistema, esto es, $Ax_0 = t$. Multiplicando en esta expresión a la izquierda por AA^+ , se obtiene

$$AA^+Ax_0 = Ax_0 = AA^+t = t$$

Recíprocamente, si $AA^+t = t$, el sistema lineal $Ax = t$ admite solución. Basta con considerar $x_0 = A^+t$.

A continuación se probará la condición 2. Puesto que el sistema es compatible, se tiene:

$$Ax = A(A^+t + (I - A^+A)z) = AA^+t = t$$

luego, x dado por (2.2) es la solución general de un sistema de ecuaciones lineales compatible indeterminado.

El recíproco de la condición 2 de esta proposición también se verifica, esto es, toda solución del sistema de ecuaciones lineales indeterminado puede expresarse como (2.2). Ya que si x verifica el sistema de ecuaciones, entonces:

$$t - Ax = 0$$

donde multiplicando por A^+ a la izquierda

$$A^+t - A^+Ax = 0$$

y sumando y restando el vector x

$$x = A^+t + (I - A^+A)x$$

Como se puede observar, en esta proposición se exige exclusivamente que la matriz A^+ verifique la primera condición para las pseudoinversas, por tanto, la proposición se verifica también si en vez de considerar la matriz A^+ se considera la matriz A^- , inversa generalizada de la matriz A .

Proposición. La solución de un sistema de ecuaciones lineales compatible indeterminado $Ax = t$ es única $\Leftrightarrow A^+A = I$.

Demostración. Por la proposición anterior se sabe que la solución general del sistema compatible, considerando la matriz A^+ , es

$$x = A^+t + (I - A^+A)z$$

si $A^+A = I$, entonces $x = A^+t$ que evidentemente es única.

Obsérvese que la condición $A^+A = I$ se verifica $\Leftrightarrow \text{rango}(A) = n$, lo que equivale a la condición establecida por Frobenius para la existencia de una solución única ya que una de las hipótesis de esta proposición es que el sistema de ecuaciones lineales sea compatible.

Lo que se va a desarrollar a continuación y hasta el final de este apéndice es de sumo interés para aplicaciones topográficas y geodésicas puesto que se analizan sistemas con más ecuaciones que incógnitas, es decir, sobredeterminados o incompatibles. Este tipo de sistemas son los que se manejan en dichas ciencias puesto que la fiabilidad de la solución (aproximada) y la estimación de su error requiere que haya un exceso de observaciones que se traducirá en más ecuaciones de las necesarias para resolver el sistema.

Por lo tanto, lo que en adelante se demostrará es que la pseudoinversa A^+ de la matriz de diseño A del sistema proporciona la mejor estimación insesgada \hat{x} para este tipo de sistemas.

Considérese ahora un (posible) sistema incompatible, la pseudoinversa permite encontrar una solución aproximada \hat{x} del sistema de ecuaciones lineales, en el sentido de que minimiza la función:

$$F(x) = (Ax - t)^T(Ax - t)$$

donde $v(\hat{x}) = A\hat{x} - t$ sería el error que se cometería al considerar \hat{x} solución del sistema.

Proposición. Sea $Ax = t$ un sistema incompatible, el vector $\hat{x} = A^+t$, donde A^+ es la pseudoinversa de la matriz A , verifica las dos condiciones siguientes:

1. \hat{x} minimiza la función real de n variables reales $F(x)$.
2. \hat{x} es el único vector que verifica:

$$\hat{x}^T \hat{x} < x^T x$$

para todo vector x que minimice la función $F(x)$.

Demostración. La condición necesaria de primer orden para que la función

$$F(x) = (Ax - t)^T(Ax - t)$$

admita un óptimo, es que el gradiente se anule:

$$\boxed{\nabla F(x) = 0 \Rightarrow A^t(Ax - t) = 0} \quad (2.3)$$

El vector $\hat{x} = A^+t$ verifica la ecuación (2.3), ya que

$$A^T(AA^+t - t) = A^T((AA^+)^T t - t) = (AA^+A)^T t - A^T t = 0$$

La condición suficiente para mínimo, se verifica si la matriz hessiana es definida o semidefinida positiva; en este caso, la matriz hessiana es $A^T A$ que es al menos semidefinida positiva.

Por tanto el vector $\hat{x} = A^+t$ minimiza la función $F(x)$ y el valor que dicha función alcanza en \hat{x} es:

$$F(\hat{x}) = t^T(I - AA^+)t$$

Obsérvese que para probar la primera parte de esta proposición se ha necesitado exclusivamente que la matriz A^+ verifique las condiciones

$$\begin{cases} (AA^+)^T = AA^+ \\ AA^+A = A \end{cases}$$

Supóngase ahora que el vector \hat{x} no es el único que minimiza la función $F(x)$. Si el vector \hat{x}' tal que $\hat{x}' \neq \hat{x}$, también minimiza la función $F(x)$, tendrá que verificar también las condiciones necesarias de óptimo siendo entonces solución del sistema $A^T Ax = A^T t$.

La solución general de este sistema viene dada por:

$$x = A'^+ At + (I - A'^+ A^T A)z \quad (2.4)$$

donde A'^+ es la pseudoinversa de $A^T A$. Mediante un sencillo cálculo se demuestra que

$$A'^+ = A^+ A^{+T}$$

por lo que la expresión (2.4) se transforma en

$$x = A^+ t + (I - A^+ A)z \quad (2.5)$$

El vector $\hat{x}' = A^+ t + (I - A^+ A)z$ con $z \neq 0$, ya que $\hat{x} \neq \hat{x}'$. Se considera

$$\begin{aligned} \hat{x}'^T \hat{x}' &= (A^+ t)^T (A^+ t) + [(I - A^+ A)z]^T [(I - A^+ A)z] = \\ &= \hat{x}^T \hat{x} + [(I - A^+ A)z]^T [(I - A^+ A)z] \end{aligned}$$

luego

$$\hat{x}'^T \hat{x}' - \hat{x}^T \hat{x} = [(I - A^+ A)z]^T [(I - A^+ A)z] > 0$$

c.q.d

Proposición. Si G es una matriz tal que $\hat{x} = Gt$ verifica

$$\hat{x}^T \hat{x} < x^T x$$

para todo $x \neq \hat{x}$ que minimice la función $F(x)$. Entonces la matriz G es la pseudoinversa de la matriz A .

Demostración. Si $\hat{x} = Gt$ verifica $F(\hat{x}) = F(x)$ para todo x de \mathbb{R}_n , \hat{x} verificará las condiciones necesarias de primer orden, esto es, se verifica:

$$A^T (A\hat{x} - t) = 0 \Rightarrow A^T (AGt - t) = 0 \Rightarrow A^T (AG - I)t = 0$$

si esta última igualdad se ha de verificar para cualquier vector t , entonces:

$$A^T (AG - I) = 0 \quad (2.6)$$

multiplicando (2.6) por G^T a la izquierda:

$$(AG)^T AG = (AG)^T$$

donde tomando traspuestas:

$$(AG)^T AG = AG = (AG)^T$$

luego la matriz AG es simétrica.

Si se considera (2.6) y tomando traspuestas, entonces:

$$(AG)^T A = A$$

Como la matriz (AG) es simétrica, se cumple: $AGA = A$

Luego queda demostrado que la matriz G verifica las condiciones 1 y 3 de Moore-Penrose.

La condición $\hat{x}^T \hat{x} < x^T x$ para todo $x \neq \hat{x}$, que minimice $F(x)$ obligará a que la matriz G verifique las condiciones 2 y 4. En efecto, como la matriz G verifica las condiciones 1 y 3 de Moore-Penrose, toda solución del sistema de ecuaciones lineales $A^T Ax = A^T t$ podrá expresarse de la forma

$$x = Gt + (I - GA)z$$

si $z \neq 0$ entonces $x \neq \hat{x} = Gt$. Por tanto:

$$x^T x = (Gt + (I - GA)z)^T (Gt + (I - GA)z) =$$

$$= \hat{x}^T \hat{x} + t^T G^T (I - GA)z + z^T (I - GA)^T Gt + ((I - GA)z)^T (I - GA)z$$

si $x^T x - \hat{x}^T \hat{x} > 0 \Rightarrow$

$$t^T G^T (I - GA)z + z^T (I - GA)^T Gt + ((I - GA)z)^T (I - GA)z > 0$$

Como esta desigualdad se ha de verificar para todo vector t y z , solamente se verificará si

$$G^T (I - GA) = 0 \tag{2.7}$$

Multiplicando (2.7) a la izquierda por A^T , se obtiene:

$$(GA)^T = (GA)^T GA = GA$$

por tanto, la matriz GA es simétrica.

Por (2.7): $G^T = G^TGA$, donde tomando traspuestas y sabiendo que la matriz GA es simétrica, entonces:

$$G = GAG$$

Así pues, la matriz G es la inversa generalizada de Moore-Penrose o pseudoinversa de la matriz A .

2.4.4. Conclusiones

- Si se verifican las *condiciones de Moore-Penrose*, a partir de la matriz A^+ ha quedado demostrado cómo se construye un vector que minimiza la función $F(x) = (Ax - t)^T(Ax - t)$ y por lo tanto, si el sistema $Ax = t$ es incompatible, con esta estimación se estará minimizando $v^t v$, donde v es el residuo o error que se comete al considerar que \hat{x} es la solución del sistema $Ax = t$.
- La pseudoinversa es la inversa generalizada que engloba a las demás. Ha quedado probado que ella permite caracterizar todos los problemas tratados con las demás inversas generalizadas. Además, determina la solución del sistema de ecuaciones lineales $Ax = t$ y permite caracterizar el vector que minimiza $x^T x$ entre los vectores que minimizan la función $F(x)$.

2.5. Diferentes formas de calcular la matriz pseudoinversa

Como ya se ha introducido, hay diferentes formas de determinar la matriz pseudoinversa de un sistema de ecuaciones normales aunque como también se ha demostrado, todas las formas proporcionan necesariamente el mismo resultado por la condición establecida de unicidad de la pseudoinversa.

A continuación se exponen cuatro diferentes modos de determinar esta matriz. Aunque existen otros, estos cuatro se consideran suficientemente representativas de todos los métodos, son los más usuales en el campo de la Geodesia y se consideran suficientes para las pretensiones de este trabajo.

2.5.1. Cálculo basado en la matriz de constreñimientos

El siguiente estudio para determinar la matriz E y posteriormente N^+ está extraído de las páginas 209 a 215 de la referencia [Chueca et al 1996].

El modelo matemático, como se expone en el apéndice A, se compone de:

- **Modelo funcional:**

$$L = F(X)$$

Que linealizado queda:

$$Ax - t = v$$

- **Modelo estocástico:**

Los residuos siguen una distribución normal tal que

$$v \sim N(0, \sigma_0^2 Q_u)$$

La matriz de pesos y la matriz cofactor a priori cumplen la siguiente relación:

$$Q_u \equiv Q = P^{-1}$$

De momento, el modelo es igual al modelo de ecuaciones de observación con la diferencia de que, esta vez, las matrices A y N presentan un defecto de rango de la misma cuantía.

Para suplir este defecto de rango y hacer que la matriz N sea invertible habrá que añadir una matriz E con el mismo número de ecuaciones independientes como unidades de defecto de rango tenga la matriz N , como ya se expuso al final del apartado 2.3.

Se denomina matriz de constreñimientos a la matriz E que sirve para calcular la pseudoinversa N^+ . Como se ha comentado, tiene que ser representativa del condicionamiento geométrico mínimo. Además, puesto que el sistema no tiene solución única sino que se busca la mejor estimación insesgada, el sistema resultante tiene que ser compatible indeterminado. Todo esto mismo equivale a añadir un grupo de restricciones que también cumplen un modelo matemático:

- **Modelo funcional:**

$$F_2(X) = 0$$

- **Modelo estocástico:**

Con la finalidad de independizar las restricciones de los observables:

$$\begin{aligned} v_2 &= 0 \\ \sigma_0^2 Q_2 &= 0 \end{aligned}$$

Consecuentemente:

$$P_2 \rightarrow \infty$$

Así pues, el modelo matemático conjunto linealizado queda de la siguiente forma:

$$\begin{cases} Ax - t = v \\ A_2 x = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Donde A_2 es una matriz de rango completo, independiente de A y con el mismo número de filas que el defecto de rango de la matriz A . Además, como puede observarse, la matriz columna de términos independientes del segundo sistema de (2.8) es nula para que el sistema global resultante sea compatible indeterminado.

El sistema de ecuaciones normales queda de la siguiente forma⁶:

$$\begin{pmatrix} A^T P A & A_2^T \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T P t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

La matriz de la izquierda es invertible por ser A_2 de rango completo e independiente de A .

Para determinar la solución se expresará el sistema conjunto de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} A^T P A & A_2^T \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{A_2} & H^T \\ H & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

⁶Según el método de ajustes coordinados. Ver capítulo 9 de la referencia [Chueca et al 1996].

Donde Q_{A_2} , H y F son matrices a determinar.
Operando se obtienen las siguientes relaciones:

$$A^T P A Q_{A_2} + A_2^T H = I \quad (2.11)$$

$$A^T P A H^T + A_2^T F = 0 \quad (2.12)$$

$$A_2 Q_{A_2} = 0 \quad (2.13)$$

$$A_2 H^T = I \quad (2.14)$$

Además de todo esto hay que hacer una consideración y es la siguiente; debido a que la matriz A es defectuosa rango, consecuentemente la matriz N también lo es y su defecto de rango será el mismo. Por lo tanto, N será semidefinida positiva con tantos autovalores nulos como defecto de rango presente (Como se demostrará en el apartado 2.5.4).

Los autovalores se determinan por definición mediante la fórmula:

$$(N - \mu I)x = 0$$

De todos los autovalores, los nulos satisfacen:

$$Nx = 0$$

Y, también:

$$Ax = 0$$

Como la resolución de $Nx = 0$ o $Ax = 0$ proporciona el núcleo de la aplicación lineal, $Ker(f)$, es evidente que los autovectores correspondientes a los autovalores nulos son los que generan el núcleo.

Así pues, llamando E a la matriz constituida por estos autovectores dispuestos por filas, se cumplirá:

$$NE^T = 0 \quad (2.15)$$

$$AE^T = 0 \quad (2.16)$$

Es evidente que la matriz E en principio podría no ser única con los citados requerimientos, sin embargo, a partir de este momento se le da esta denominación a la matriz que además de cumplir estos requisitos, cumplirá los que posteriormente se impongan para que proporcione junto con la matriz A , el ajuste que proporcione la mejor estimación insesgada. Se cumple también:

$$EA^T = 0$$

$$EN^T = E(A^T PA)^T = EA^T PA = 0$$

Multiplicando por E en (2.11):

$$EA^T PAQ_{A_2} + EA_2^T H = E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EA_2^T H = E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = (EA_2^T)^{-1} E$$

Sustituyendo el valor de H obtenido en (2.14):

$$A_2 H^T = A_2 E^T [(EA_2^T)^{-1}]^T = (EA_2^T)^T [(EA_2^T)^T]^{-1} = I$$

Sustituyendo esta vez H el (2.12):

$$A^T PA [(EA_2^T)^{-1} E]^T + A_2^T F = A^T PA E^T (A_2 E^T)^{-1} + A_2^T F = 0 \quad (2.17)$$

Teniendo en cuenta (2.15):

$$A_2^T F = 0 \quad (2.18)$$

Como A_2 es de rango completo, se cumple:

$$F = 0$$

Sustituyendo lo obtenido hasta ahora en (2.9):

$$\begin{pmatrix} A^T PA & A_2^T \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{A_2} & E^T (A_2 E^T)^{-1} \\ (EA_2^T)^{-1} E & 0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Sustituyendo el valor de H en (2.11):

$$A^T PAQ_{A_2} + A_2^T (EA_2^T)^{-1} E = I$$

Se define la matriz no simétrica T_{A_2} :

$$T_{A_2} = A^T PAQ_{A_2} = I - A_2^T (EA_2^T)^{-1} E \quad (2.20)$$

Teniendo en cuenta (2.13):

$$A^T P A Q_{A_2} = A^T P A Q_{A_2} + A_2^T A_2 Q_{A_2} \quad (2.21)$$

Y a partir de (2.17) y (2.18):

$$A^T P A E^T (A_2 E^T)^{-1} = 0 = A^T P A E^T (A_2 E^T)^{-1} (E A_2^T)^{-1} E \quad (2.22)$$

Aplicando la siguiente igualdad:

$$A_2^T A_2 E^T (A_2 E^T)^{-1} (E A_2^T)^{-1} E = A_2^T (E A_2^T)^{-1} E \quad (2.23)$$

y sumando las tres últimas ecuaciones (2.21), (2.22) y (2.23):

$$\begin{aligned} & A^T P A Q_{A_2} + A_2^T A_2 Q_{A_2} + A^T P A E^T (A_2 E^T)^{-1} (E A_2^T)^{-1} E + \\ & + A_2^T A_2 E^T (A_2 E^T)^{-1} (E A_2^T)^{-1} E = A^T P A Q_{A_2} + A_2^T (E A_2^T)^{-1} E \end{aligned}$$

Agrupando y aplicando (2.20):

$$(A^T P A + A_2^T A_2) [Q_{A_2} + E^T (A_2 E^T)^{-1} (E A_2^T)^{-1} E] = I$$

Que implica que $(A^T P A + A_2^T A_2)$ es invertible y se puede despejar la matriz simétrica Q_{A_2} :

$$Q_{A_2} = (A^T P A + A_2^T A_2)^{-1} - E^T (A_2 E^T)^{-1} (E A_2^T)^{-1} E$$

Finalmente, la solución del ajuste se determina despejando (2.19) en (2.9):

$$\begin{pmatrix} x \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{A_2} & E^T (A_2 E^T)^{-1} \\ (E A_2^T)^{-1} E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T P t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así pues:

$$\hat{x} = Q_{A_2} A^T P t \quad (2.24)$$

Siendo \hat{x} una cualquiera de las infinitas soluciones del sistema.

Como ya se ha demostrado en el apartado 2.4, la condición necesaria y suficiente para que esa solución sea, además, mejor estimación insesgada, Q_{A_2} tiene que cumplir las condiciones de Moore-Penrose. Consecuentemente, para obtener la matriz pseudoinversa de N a partir del resultado obtenido, habrá que probar las cuatro condiciones:

$$1. NN^+N = N$$

Multiplicando (2.20) por $A^T PA$ por la derecha:

$$A^T PAQ_{A_2}A^T PA = A^T PA - A_2^T(EA_2^T)^{-1}EA^T PA$$

Y dado que $AE^T = 0 \Rightarrow EA^T = 0$

$$A^T PAQ_{A_2}A^T PA = A^T PA$$

Es decir:

$$NQ_{A_2}N = N$$

c.q.d

$$2. N^+NN^+ = N^+$$

Multiplicando (2.20) por Q_{A_2} por la izquierda:

$$Q_{A_2}T_{A_2} = Q_{A_2}A^T PAQ_{A_2} = Q_{A_2} - Q_{A_2}A_2^T(EA_2^T)^{-1}E$$

Y según (2.13):

$$A_2Q_{A_2} = 0 \Rightarrow Q_{A_2}A_2^T = 0$$

Finalmente se obtiene:

$$Q_{A_2}A^T PAQ_{A_2} = Q_{A_2}NQ_{A_2} = Q_{A_2}$$

c.q.d

Antes de comprobar si cumplen las dos condiciones restantes, supóngase que la matriz $A_2 = E$, puesto que, al ser independiente de A , cumple, al igual que E : $AA_2^T = 0$ y también $NA_2^T = 0$. Si, con este supuesto, la matrices Q_{A_2} y N satisfacen las dos condiciones restantes, quedará probado que la matriz

$$Q_{A_2} = (A^T PA + E^T E)^{-1} - E^T (EE^T)^{-1} (EE^T)^{-1} E$$

es la pseudoinversa de la matriz N .

$$3. NN^+ = (NN^+)^T$$

Sustituyendo en (2.20):

$$NQ_{A_2} = T_{A_2} = I - E^T(EE^T)^{-1}E$$

Tomando transpuestas de esta expresión:

$$(NQ_{A_2})^T = I^T - [E^T(EE^T)^{-1}E]^T = I - E^T(EE^T)^{-1}E = NQ_{A_2}$$

c.q.d

$$4. N^+N = (N^+N)^T$$

$$(Q_{A_2}N)^T = N^TQ_{A_2}^T =$$

(por ser las matrices N y Q_{A_2} simétricas)

$$= NQ_{A_2} =$$

(por ser simétrico el producto de matrices simétricas)

$$= (NQ_{A_2})^T = Q_{A_2}^TN^T = Q_{A_2}N$$

c.q.d

Así pues, queda demostrado que la matriz pseudoinversa de N que en adelante se denotará como N^+ , puede calcularse según la siguiente expresión:

$$\boxed{N^+ = (A^T P A + E^T E)^{-1} - E^T (E E^T)^{-1} (E E^T)^{-1} E} \quad (2.25)$$

Además, dado que se ha probado que $A_2 = E$, sustituyendo este valor en (2.20) se cumple

$$T_E = A^T P A N^+ = N N^+ = I - E^T (E E^T)^{-1} E \quad (2.26)$$

Interesante resultado que será de utilidad más adelante.

2.5.2. Descomposición LU

Este método se basa en aplicar transformaciones elementales a la matriz N del sistema de ecuaciones normales hasta conseguir que la matriz resultante sea triangular superior. Cada una de las operaciones elementales supone multiplicar el sistema por una matriz triangular inferior con todos los elementos de su diagonal principal iguales a 1. El resultado de todas estas operaciones será la descomposición de la matriz N en el producto de otras dos matrices cuadradas, LU , la primera, L , triangular inferior con los elementos de su diagonal principal iguales a 1 y la segunda, U , triangular superior.

En el caso de las redes libres, el sistema de ecuaciones normales es compatible indeterminado por lo que al realizar la triangulación habrá tantas filas de U iguales a 0 como defecto de rango exista. Por lo tanto, esas filas no producen ningún efecto al multiplicarlas por la matriz L . Es decir, el resultado de multiplicar L por U será el mismo que multiplicar dos nuevas matrices, B y C , con los siguientes requerimientos:

- La matriz C no es cuadrada sino que resulta de suprimir las filas de U iguales a 0.
- La matriz B tampoco es cuadrada y es el resultado de suprimir tantas columnas a la derecha de la matriz L como la defecto de rango de la matriz N .
- Obviamente, el resultado del producto BC es idéntico al de LU , resultando en ambos casos la matriz N . Esto se debe a que las filas iguales a 0 de U no influyen en el resultado.

Todo esto expresado de forma matricial queda de la siguiente manera:

$$N = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1r} & u_{1(r+1)} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2r} & u_{2(r+1)} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3r} & u_{3(r+1)} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{rr} & u_{r(r+1)} & \cdots & u_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{(r-1)1} & l_{(r-1)2} & l_{(r-1)3} & \cdots & 1 & 0 \\ l_{r1} & l_{r2} & l_{r3} & \cdots & l_{r(r-1)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n(r-1)} & l_{nr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1r} & u_{1(r+1)} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2r} & u_{2(r+1)} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3r} & u_{3(r+1)} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{rr} & u_{r(r+1)} & \cdots & u_{rn} \end{pmatrix} = BC$$

El algoritmo de cálculo para calcular L y U está programado en el complemento “Matrix” de “EXCEL”⁷.

Con estas premisas, el sistema de ecuaciones normales queda de la siguiente forma:

$$Nx = BCx = A^T Pt = d$$

Llamando y a Cx , el sistema se puede descomponer en otros dos:

$$\begin{cases} y = Cx \\ By = d \end{cases} \quad (2.27)$$

La solución mínimo cuadrática del segundo sistema ($By = d$) con más ecuaciones que incógnitas es idéntica a la expuesta en el apartado A.4.1 del apéndice A aunque con una matriz de pesos igual a la identidad. Resolviendo:

$$\hat{y} = (B^T B)^{-1} B^T d$$

Sustituyendo este resultado en la primera ecuación de (2.27):

$$Cx = (B^T B)^{-1} B^T d$$

Esta vez el ajuste mínimo cuadrático, por tratarse se un sistema compatible indeterminado, se resuelve aplicando la ecuación (C.1) del apéndice C:

⁷Véase la dirección web de la referencia [<http://digilander.libero.it/foxes>].

$$\hat{x} = [C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T]d = [C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T]A^T Pt$$

Siendo en este caso la inversa generalizada que resuelve el sistema N^- de la forma siguiente:

$$N^- = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T$$

Para verificar si esta matriz es la pseudoinversa de N habrá que comprobar que cumple las cuatro condiciones de Moore-Penrose:

$$1. NN^+N = N$$

Partiendo de:

$$\begin{cases} N = BC \\ N^- = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T \end{cases}$$

Sustituyendo en la primera condición:

$$\begin{aligned} NN^-N &= (BC)[C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T](BC) = \\ &= B[(CC^T)(CC^T)^{-1}][(B^TB)^{-1}(B^TB)]C = BC = N \end{aligned}$$

c.q.d

$$2. N^+NN^+ = N^+$$

Partiendo de nuevo de:

$$\begin{cases} N = BC \\ N^- = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T \end{cases}$$

Sustituyendo esta vez en la segunda condición:

$$\begin{aligned} N^-NN^- &= [C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T]BC[C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T] = \\ &= C^T(CC^T)^{-1}[(B^TB)^{-1}(B^TB)][(CC^T)(CC^T)^{-1}](B^TB)^{-1}B^T \\ &= C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T = N^- \end{aligned}$$

c.q.d

$$3. NN^+ = (NN^+)^T$$

Por un lado:

$$\begin{aligned} NN^- &= (BC)[C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T] = \\ &= B[(CC^T)(CC^T)^{-1}](B^TB)^{-1}B^T = B(B^TB)^{-1}B^T \end{aligned}$$

Así pues:

$$(NN^-)^T = [B(B^TB)^{-1}B^T]^T = B(B^TB)^{-1}B^T = NN^-$$

c.q.d

$$4. N^+N = (N^+N)^T$$

Por un lado:

$$\begin{aligned} N^-N &= [C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T](BC) = \\ &= C^T(CC^T)^{-1}[(B^TB)^{-1}(B^TB)]C = C^T(CC^T)^{-1}C \end{aligned}$$

Por tanto:

$$(N^-N)^T = [C^T(CC^T)^{-1}C]^T = C^T(CC^T)^{-1}C = N^-N$$

c.q.d

Llegados a este punto, queda demostrado que otra expresión de la seudo inversa de N tiene la forma:

$$\boxed{N^+ = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T} \quad (2.28)$$

2.5.3. Descomposición de Cholesky

Muy parecido al método de descomposición LU es el método de Cholesky. En este caso, la matriz que se desea descomponer tiene que ser simétrica y definida positiva. En el caso de la matriz N , se cumplen ambos requisitos luego se podrá realizar esta descomposición. El método es el siguiente:

Si N es una matriz simétrica y definida positiva entonces existe otra matriz triangular inferior L , invertible, tal que $LL^T = N$.

Como aclaración, se puede decir que L no es, en general, la de la descomposición LU y que la descomposición de Cholesky no es única, a no ser que se imponga la condición sobre L de que tenga diagonal positiva. En el presente estudio se impondrá esta condición para obtener una matriz única y posteriormente comprobar que cumple las condiciones de Moore-Penrose.

En el caso de que la matriz N sea deficiente de rango, ocurrirá como en la descomposición LU: habrá tantas columnas iguales a 0 en la parte derecha de L como defecto de rango tenga N . Así pues, en lugar de tomar LL^T como resultado de la descomposición, se tomará $L'L'^T$ siendo L' la matriz que resulta de suprimir a L las columnas iguales a 0. Como dichas columnas no tienen efecto a la hora de hacer el producto, es obvio que $LL^T = L'L'^T = N$.

Las fórmulas para la obtención de los elementos de L ; l_{ij} se pueden obtener igualando elementos en $N = LL^T$, y resulta una fórmula general:

$$\begin{cases} l_{ij} = \frac{m_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk} l_{ik}}{l_{jj}}, & \text{para } i > j \\ l_{ii} = \sqrt{m_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \end{cases}$$

El esquema de cálculo del método de Cholesky es bastante ventajoso debido a que utiliza un relativamente bajo número de operaciones. Este algoritmo de cálculo también está programado en el complemento "Matrix" de "EXCEL".

De este modo se puede hacer, de manera análoga al caso de la LU, descomponer el sistema de ecuaciones inicial en otros dos:

$$Nx = L'L'^T x = A^T P t = d$$

Da lugar a:

$$\begin{cases} y = L^T x \\ L' y = d \end{cases} \quad (2.29)$$

Como en el caso de la transformación LU, se procede aplicando el resultado del apartado A.4.1 del apéndice A. La solución mínimo cuadrática del segundo sistema de ecuaciones de (2.29), es la siguiente:

$$\hat{y} = (L'^T L')^{-1} L'^T d$$

Sustituyendo este resultado en el primer sistema:

$$L^T x = (L'^T L')^{-1} L'^T d$$

Una vez más, de la misma forma que se procedió en la transformación LU, es decir aplicando al segundo sistema de ecuaciones la ecuación (C.1) del apéndice C, se obtiene:

$$\hat{x} = L'(L'^T L')^{-1}(L'^T L')^{-1} L'^T d$$

La inversa generalizada que resuelve el sistema tiene esta vez la forma:

$$N^- = L'(L'^T L')^{-1}(L'^T L')^{-1} L'^T$$

A continuación se comprobará que cumple las condiciones de Moore-Penrose para verificar si N^- , efectivamente, es también otra forma de calcular la matriz pseudoinversa de N :

$$1. NN^+N = N$$

$$\begin{aligned} NN^-N &= (L'L^T)[L'(L'^T L')^{-1}(L'^T L')^{-1}L'^T](L'L^T) = \\ &= L'[(L'^T L')(L'^T L')^{-1}][(L'^T L')^{-1}(L'^T L')]L^T = L'L^T = N \end{aligned}$$

c.q.d

$$2. N^+NN^+ = N^+$$

$$\begin{aligned}
N^- N N^- &= [L'(L'^T L')^{-1}(L'^T L')^{-1} L'^T] L' L'^T [L'(L'^T L')^{-1}(L'^T L')^{-1} L'^T] = \\
&= L'(L'^T L')^{-1} [(L'^T L')^{-1}(L'^T L')] [(L'^T L')(L'^T L')^{-1}] (L'^T L')^{-1} L'^T = \\
&= L'(L'^T L')^{-1}(L'^T L')^{-1} L'^T = N^-
\end{aligned}$$

c.q.d

$$3. \quad N N^+ = (N N^+)^T$$

Por un lado:

$$\begin{aligned}
N N^- &= (L' L'^T) [L'(L'^T L')^{-1}(L'^T L')^{-1} L'^T] = \\
&= L' [(L'^T L')(L'^T L')^{-1}] (L'^T L')^{-1} L'^T = L'(L'^T L')^{-1} L'^T \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Así pues:

$$(N N^-)^T = [L'(L'^T L')^{-1} L'^T]^T = L'(L'^T L')^{-1} L'^T = N N^-$$

c.q.d

$$4. \quad N^+ N = (N^+ N)^T$$

Por un lado:

$$\begin{aligned}
N^- N &= [L'(L'^T L')^{-1}(L'^T L')^{-1} L'^T] (L' L'^T) = \\
&= L'(L'^T L')^{-1} [(L'^T L')^{-1}(L'^T L')] L'^T = L'(L'^T L')^{-1} L'^T \quad (2.31)
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$(N^- N)^T = [L'(L'^T L')^{-1} L'^T]^T = L'(L'^T L')^{-1} L'^T = N^- N$$

c.q.d

Por lo tanto, queda demostrado que otra expresión de la pseudoinversa de N tiene la forma:

$$\boxed{N^+ = L'(L'^T L')^{-1}(L'^T L')^{-1} L'^T} \quad (2.32)$$

Además según lo deducido en las ecuaciones (2.30) y (2.31):

$$\boxed{NN^+ = N^+N} \quad (2.33)$$

Expresión que más adelante se utilizará.

2.5.4. Descomposición en valores singulares (DVS)

Este apartado ha sido extraído de las páginas 16 a 23 de la referencia [Márquez].

En el caso de las matrices simétricas (como ocurre con N puesto que $N = N^T$) se cumplen las siguientes propiedades:

1. Los vectores propios de N son mutuamente ortogonales.

Demostración:

Sea N simétrica de orden $n \times n$ y μ_i, μ_j dos valores propios distintos con sus respectivos vectores propios x_i, x_j .

Por hipótesis: $Ax_i = \mu_i x_i$

Trasponiendo ambos miembros:

$$x_i^T A^T = \mu_i x_i^T$$

Multiplicando por x_j ambos miembros a la derecha:

$$x_i^T A^T x_j = \mu_i x_i^T x_j$$

Puesto que N es simétrica y x_j es un vector propio correspondiente al valor propio μ_j :

$$\begin{aligned}x_i^T \mu_j x_j &= \mu_i x_i^T x_j \Rightarrow \mu_j x_i^T x_j = \mu_i x_i^T x_j \\ \mu_j x_i^T x_j - \mu_i x_i^T x_j &= 0 \\ (\mu_j - \mu_i) x_i^T x_j &= 0\end{aligned}$$

Puesto que los valores propios son distintos ($\mu_i \neq \mu_j$), tiene que cumplirse que $x_i^T x_j = 0$; es decir, x_i y x_j son ortogonales para $i \neq j$.

2. **Los valores propios de N son mayores o iguales a cero (N es definida o semidefinida positiva).**

Demostración:

Si N es una matriz simétrica de orden $n \times n$ puede expresarse como $N = B^T B$ donde B es una matriz de orden $m \times n$. Sea μ_j un valor propio de N y x_j su vector propio correspondiente:

$$\begin{aligned}Nx_j &= \mu_j x_j \\ B^T Bx_j &= \mu_j x_j\end{aligned}$$

Multiplicando ambos miembros por x_j^T por la izquierda:

$$\begin{aligned}x_j^T B^T Bx_j &= x_j^T \mu_j x_j \\ (B^T x_j)^T Bx_j &= \mu_j x_j^T x_j \\ \|Bx_j\|^2 &= \mu_j \|x_j\|^2\end{aligned}$$

Entonces:

$$\mu_j = \left(\frac{\|Bx_j\|}{\|x_j\|} \right)^2 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

3. **El número de valores propios nulos es igual al defecto de rango de la matriz N .**

Demostración:

Un valor propio de N es nulo si y sólo si $Nx_j = 0$; en efecto:

$$Nx_j = \mu_j x_j$$

Si $Nx_j = 0 \rightarrow \mu_j x_j = 0 \rightarrow \mu_j = 0$ puesto que $x_j \neq 0$

Si $\mu_j = 0 \rightarrow \mu_j x_j = 0 \rightarrow Nx_j = 0$ puesto que $N \neq 0$

El conjunto de los x_j que hacen $Nx_j = 0$ es el $Ker(N)$ (también denominado espacio nulo de la matriz N) y tiene dimensión $d = n - R(N)$; es decir, existen d vectores propios independientes que lo generan. El número de valores propios nulos de N es entonces igual al defecto de rango de la matriz N : $d = n - R(N)$.

Una vez demostradas estas tres propiedades que serán útiles para el posterior desarrollo se pasa a describir el método en sí. La descomposición en valores singulares consiste en una descomposición de una matriz N en otras 3: $N = UDV^T$. La matriz D es una matriz diagonal y las matrices U y V^T , las de cambio de base de N a D . A continuación se desarrollará el método en sí obteniéndose las propiedades particulares de cada una de estas tres matrices.

Como en los dos casos anteriores, el complemento "Matrix" de "EXCEL" tiene también implementado el algoritmo para el cálculo de las matrices U , D y U^T .

Según la propiedad 1 demostrada anteriormente, si N es simétrica de orden $n \times n$ sus vectores propios son ortogonales: $x_i^T x_j = 0$ para $i \neq j$. Denotando por q_j a los vectores propios normalizados [Márquez]:

$$q_j = \frac{x_j}{\|x_j\|} \text{ para } j = 1, \dots, n$$

Se obtiene así un conjunto ortonormal de vectores propios normalizados:

$$q_i^T q_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

que son las columnas de la matriz U :

$$U = [q_1, q_2, \dots, q_n]$$

Como la matriz U es ortogonal: $U^{-1} = U^T$

El producto NU cumple:

$$\begin{aligned}
 NU &= N[q_1, q_2, \dots, q_n] = [Nq_1, Nq_2, \dots, Nq_n] = \\
 &= [\mu_1 q_1, \mu_2 q_2, \dots, \mu_r q_r, 0q_{r+1}, \dots, 0q_n] = \\
 &= \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \mu_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = UD
 \end{aligned}$$

Donde D es una matriz diagonal cuyos elementos no nulos son los valores propios de N ordenados de mayor a menor (criterio para expresar D de forma única):

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \dots \geq \mu_r > 0$$

Multiplicando ambos miembros por U^T por la derecha:

$$\begin{aligned}
 NUU^T &= UDU^T \Rightarrow \\
 N &= UDU^T
 \end{aligned}$$

Como puede observarse, en el caso de matrices simétricas la descomposición UDV^T se convierte en UDU^T luego:

$$\boxed{V \equiv U}$$

La inversa de la matriz N sería inmediata si fuera definida positiva puesto que la inversa de D resultaría una matriz diagonal cuyos elementos no nulos serían los inversos de los valores propios de N . Asimismo, las inversas de U y U^T son inmediatas al tratarse de matrices ortogonales.

Sin embargo, al ser N semidefinida positiva, no es invertible pero como al hacer el producto UDU^T se anulan los vectores propios de U correspondientes a los valores propios nulos de D , es lógico pensar que al buscar la pseudoinversa de N esto siga ocurriendo, por lo tanto, se ensayará la forma: $N^- = UD^-U^T$ donde D^- denota la siguiente matriz:

$$D^- = \begin{pmatrix} 1/\mu_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\mu_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\mu_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

A continuación, una vez más, habrá que probar que este resultado cumple las condiciones de Moore-Penrose:

1. $NN^+N = N$

$$\begin{aligned} NN^-N &= (UDU^T)(UD^-U^T)(UDU^T) = \\ &= UD(U^TU)D^-(U^TU)DU^T = \\ &= U(DD^-D)U^T = UDU^T = N \end{aligned}$$

c.q.d

2. $N^+NN^+ = N^+$

$$\begin{aligned} N^-NN^- &= (UD^-U^T)(UDU^T)(UD^-U^T) = \\ &= UD^-(U^TU)D(U^TU)D^-U^T = \\ &= U(D^-DD^-)U^T = UD^-U^T = N^- \end{aligned}$$

c.q.d

3. $NN^+ = (NN^+)^T$

$$\begin{aligned} (NN^-)^T &= (UDU^T)^T(UD^-U^T)^T = \\ &= (UDU^T)(UD^-U^T) = \\ &= NN^- \end{aligned}$$

c.q.d

$$4. N^+N = (N^+N)^T$$

$$\begin{aligned} (N^-N)^T &= (UD^{-1}U^T)^T(UDU^T)^T = \\ &= (UD^{-1}U^T)(UDU^T) = \\ &= N^-N \end{aligned}$$

c.q.d

De esta manera queda demostrado que otra forma de expresión de la matriz pseudoinversa de N es la siguiente:

$$\boxed{N^+ = UD^{-1}U^T} \quad (2.35)$$

2.6. Determinación de la matriz de costreñimientos

El presente apartado está basado en el estudio desarrollado en el punto 8.8 de la referensncia [Sevilla, 2005] (páginas 52 a 61).

En el apartado 2.3 se introdujo el concepto de matriz de constreñimientos así como su notación: E . Posteriormente, en el apartado 2.5.1 se dedujo una expresión de la matriz pseudoinversa que hacía uso de esa matriz E . Pues bien, a continuación se procederá a desarrollar la teoría de cómo construir esa matriz E de forma que cumpla los requerimientos hasta ahora establecidos.

Dadas las coordenadas una red geodésica donde se cumple la relación:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0$$

Donde \mathbf{X}_0 son los valores aproximados de las coordenadas de los vértices en un determinado sistema de referencia.

Ahora supóngase que se toma otro sistema de referencia ligeramente distinto al anterior. Las coordenadas ahora cumplen:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0^*$$

Donde \mathbf{X}_0^* son las coordenadas aproximadas de los vértices en este nuevo sistema de referencia.

Como la coordenadas \mathbf{X} de los vértices son las que van a definir el sistema de referencia, las coordenadas ajustadas tienen que ser las mismas:

$$\mathbf{X}_0 + \mathbf{x} = \mathbf{X}_0^* + \mathbf{x}^*$$

La variación de los sistemas de referencia definidos por las coordenadas aproximadas resulta:

$$d\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0^* - \mathbf{X}_0$$

Estableciéndose a continuación las fórmulas de transformación entre sistemas tridimensionales. La transformación se compondrá de:

1. Una **traslación** del origen definida por el vector $\boldsymbol{\tau}$:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{pmatrix}$$

Vectorialmente se representa como:

$$\mathbf{X}'_0 = \mathbf{X}_0 + \boldsymbol{\tau}$$

Es decir:

$$\begin{cases} X'_0 = X_0 + \tau_x \\ Y'_0 = Y_0 + \tau_y \\ Z'_0 = Z_0 + \tau_z \end{cases}$$

2. Tres **rotaciones** infinitesimales alrededor de los ejes X' , Y' y Z' los ángulos ω_x , ω_y y ω_z respectivamente:

$$\mathbf{X}''_0 = R_z(\omega_z)R_y(\omega_y)R_x(\omega_x)\mathbf{X}'_0$$

desarrollando:

$$\begin{pmatrix} X''_0 \\ Y''_0 \\ Z''_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \omega_z & 0 \\ -\omega_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\omega_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \omega_y & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega_x \\ 0 & -\omega_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_0 \\ Y'_0 \\ Z'_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_0 \\ Y'_0 \\ Z'_0 \end{pmatrix}$$

3. Un **cambio de escala** muy próximo a la unidad, tal que:

$$1 + \mu \cong 1 \Rightarrow \mu \cong 0$$

Es decir:

$$\mathbf{X}_0^* = (1 + \mu)\mathbf{X}_0''$$

A partir de las relaciones obtenidas y considerando tanto los giros como μ infinitesimales:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0^* &= (1 + \mu)\mathbf{X}_0'' = (1 + \mu) \begin{pmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X}'_0 = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \mu & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 + \mu & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 + \mu \end{pmatrix} \mathbf{X}'_0 = \begin{pmatrix} 1 + \mu & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 + \mu & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 + \tau_x \\ Y_0 + \tau_y \\ Z_0 + \tau_z \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + \mu & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 + \mu & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Expresando esto mismo en función de las incógnitas (**7 parámetros**):

$$\begin{pmatrix} X_0^* - X_0 \\ Y_0^* - Y_0 \\ Z_0^* - Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_0 & Y_0 & X_0 \\ 0 & 1 & 0 & Z_0 & 0 & -X_0 & Y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -Y_0 & X_0 & 0 & Z_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \mu \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Esta fórmula extendida a todos los puntos de la red se expresa de la siguiente forma:

$$d\mathbf{X}_0 = \mathbf{E}^T \mathbf{p} \quad (2.37)$$

Donde $d\mathbf{X}_0$ son las diferencias infinitesimales entre ambos sistemas para los k puntos de la red:

$$d\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} X_{01}^* - X_{01} \\ Y_{01}^* - Y_{01} \\ Z_{01}^* - Z_{01} \\ X_{02}^* - X_{02} \\ Y_{02}^* - Y_{02} \\ Z_{02}^* - Z_{02} \\ \dots \\ X_{0k}^* - X_{0k} \\ Y_{0k}^* - Y_{0k} \\ Z_{0k}^* - Z_{0k} \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_{01} & Y_{01} & X_{01} \\ 0 & 1 & 0 & Z_{01} & 0 & -X_{01} & Y_{01} \\ 0 & 0 & 1 & -Y_{01} & X_{01} & 0 & Z_{01} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_{02} & Y_{02} & X_{02} \\ 0 & 1 & 0 & Z_{02} & 0 & -X_{02} & Y_{02} \\ 0 & 0 & 1 & -Y_{02} & X_{02} & 0 & Z_{02} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_{0k} & Y_{0k} & X_{0k} \\ 0 & 1 & 0 & Z_{0k} & 0 & -X_{0k} & Y_{0k} \\ 0 & 0 & 1 & -Y_{0k} & X_{0k} & 0 & Z_{0k} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Dado que:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^* = \mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_0^* = d\mathbf{X}_0$$

se cumple:

$$\mathbf{x} = d\mathbf{x} + \mathbf{x}^* = d\mathbf{X}_0 + \mathbf{x}^*$$

Sustituyendo en (2.37):

$$\mathbf{x} = \mathbf{E}^T \mathbf{p} + \mathbf{x}^* \quad (2.39)$$

La solución buscada debe cumplir el requisito $\|x\|_{\text{mínimo}}$ o de forma equivalente $\Sigma_{x^*x^*}$ de traza mínima⁸. Por tanto, la condición de partida será un conjunto de parámetros incógnita x referidos a un sistema original arbitrario y se desea llegar a otro conjunto de parámetros x^* referidos a un sistema en el que se verifique la propiedad de la traza mínima. Así pues, la solución resultará de obtener el vector p de transformación entre x y x^* .

Supóngase la relación matricial:

$$p = Bx \quad (2.40)$$

Se trata de encontrar B que haga mínima la traza de $\Sigma_{x^*x^*}$. De las relaciones (2.39) y (2.40) resulta:

$$x^* = x - E^T p = x - E^T Bx = (I - E^T B)x \quad (2.41)$$

Aplicando la ley de propagación de varianzas covarianzas (véase apéndice B):

$$\Sigma_{x^*x^*} = (I - E^T B)\Sigma_{xx}(I - E^T B)^T$$

Desarrollando este producto se obtiene:

$$\Sigma_{x^*x^*} = \Sigma_{xx} - E^T B\Sigma_{xx} - \Sigma_{xx}B^T E + E^T B\Sigma_{xx}B^T E$$

Su traza será:

$$Tr\Sigma_{x^*x^*} = Tr\Sigma_{xx} - 2Tr(E^T B\Sigma_{xx}) + Tr(E^T B\Sigma_{xx}B^T E)$$

Derivando con respecto a B e igualando a 0 para obtener la condición de mínimo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Tr\Sigma_{x^*x^*}}{\partial B} &= \frac{\partial Tr\Sigma_{xx}}{\partial B} - 2\frac{\partial Tr(E^T B\Sigma_{xx})}{\partial B} + \frac{\partial Tr(E^T B\Sigma_{xx}B^T E)}{\partial B} = \\ &= -2\frac{\partial Tr(\Sigma_{xx}E^T B)}{\partial B} + \frac{\partial Tr(\Sigma_{xx}B^T E E^T B)}{\partial B} = \\ &= -2\Sigma_{xx}E^T + 2\Sigma_{xx}B^T E E^T = 0 \end{aligned}$$

⁸Según se demuestra en las páginas 32-34 de la referencia [Sevilla, 2005].

Finalmente:

$$\Sigma_{xx} \mathbf{E}^T = \Sigma_{xx} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{E}^T$$

Despejando:

$$\mathbf{E}^T = \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{E}^T \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{B}$$

Como \mathbf{E}^T definida según (2.38) es de rango completo:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{E} \mathbf{E}^T)^{-1} \mathbf{E} \quad (2.42)$$

Resultando que si los parámetros de transformación \mathbf{p} verifican $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{p}$ con la matriz \mathbf{B} obtenida, entonces $\Sigma_{x^*x^*}$ de los parámetros calculados con (2.41) tiene mínima traza.

Sustituyendo (2.42) en (2.41):

$$\mathbf{x}^* = [\mathbf{I} - \mathbf{E}^T (\mathbf{E} \mathbf{E}^T)^{-1} \mathbf{E}] \mathbf{x}$$

Y llamando \mathbf{H} a la matriz:

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \mathbf{E}^T \mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{E}^T (\mathbf{E} \mathbf{E}^T)^{-1} \mathbf{E}$$

Resultando finalmente:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{H} \mathbf{x}$$

La matriz de varianzas-covarianzas de traza mínima, puesto que la matriz \mathbf{H} es simétrica, resulta:

$$\Sigma_{x^*x^*} = \mathbf{H} \Sigma_{xx} \mathbf{H}$$

Además, la matriz **simétrica** \mathbf{H} resulta ser además **idempotente**:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \mathbf{H} &= [\mathbf{I} - \mathbf{E}^T (\mathbf{E} \mathbf{E}^T)^{-1} \mathbf{E}] [\mathbf{I} - \mathbf{E}^T (\mathbf{E} \mathbf{E}^T)^{-1} \mathbf{E}] = \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{E}^T (\mathbf{E} \mathbf{E}^T)^{-1} \mathbf{E} - \mathbf{E}^T (\mathbf{E} \mathbf{E}^T)^{-1} \mathbf{E} + \mathbf{E}^T (\mathbf{E} \mathbf{E}^T)^{-1} \mathbf{E} \mathbf{E}^T (\mathbf{E} \mathbf{E}^T)^{-1} \mathbf{E} = \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{E}^T (\mathbf{E} \mathbf{E}^T)^{-1} \mathbf{E} = \mathbf{H} \end{aligned}$$

El sistema de referencia óptimo al que conduce \mathbf{H} es único. Para demostrarlo se supondrá otro sistema cuyos parámetros son $\bar{\mathbf{x}}$ y su matriz de varianza covarianza $\Sigma_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}}$. Tomando esta vez \mathbf{x}^* y \mathbf{x}^* :

$$\bar{x} = Hx^* = HHx = Hx = x^* \quad (2.43)$$

$$\Sigma_{\bar{x}\bar{x}} = H\Sigma_{x^*x^*}H = HH\Sigma_{xx}HH = H\Sigma_{xx}H = \Sigma_{x^*x^*} \quad (2.44)$$

Por lo tanto, si se llega a los mismos x^* y $\Sigma_{x^*x^*}$, el sistema de referencia es único.

Las relaciones (2.43) y (2.44) demuestran dos propiedades importantísimas de la matriz H respecto a x^* y $\Sigma_{x^*x^*}$:

$$\begin{cases} x^* = Hx^* \\ \Sigma_{x^*x^*} = H\Sigma_{x^*x^*}H \end{cases}$$

Es decir, que no importa el sistema en el que se tomen los valores aproximados de los parámetros X . El sistema sólo sirve para calcular los elementos de la matriz H , por lo tanto, puede ser arbitrario siempre que los parámetros X sean suficientemente aproximados como para que el sistema converja a x .

Éste es un importantísimo resultado por un doble motivo; por un lado se ha conseguido el objetivo de este apartado, es decir, la obtención de la matriz de costreñimientos E que hace mínima la traza de Σ_{xx} . Por otro lado se ha demostrado la existencia de un sistema de referencia óptimo único. Esto último indica que este procedimiento es adecuado para la definición de sistemas de referencia optimizados a partir observaciones en otros sistemas cuyos parámetros que los definen se desean mejorar.

A continuación se particularizará la solución obtenida para la matriz de costreñimientos E en diferentes tipos de redes. Para todos los casos se considerará una red geodésica formada por k puntos. La fórmula general (2.38) será a partir de la cual se obtendrá la particular en cada uno de los casos.

2.6.1. Redes tridimensionales

Se parte de los postulados siguientes:

- Coordenadas del punto i : (X_i, Y_i, Z_i) .
- Vector de incógnitas: $x = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_k, y_k, z_k)^T$
- Relación entre parámetros: $x = X - X_0$

- Solución (mejor estimación insesgada): $\hat{X} = X_0 + \hat{x}$

Se considerarán diferentes casos a su vez:

1. **Defecto de rango 7. Red completamente libre.** No está definido ninguno de los parámetros que caracteriza la red, es decir:

- **Origen:** no definido.
- **Orientación:** no definida.
- **Escala:** no definida.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & Z_1 & -Y_1 & 0 & Z_2 & -Y_2 & \cdots & 0 & Z_k & -Y_k \\ -Z_1 & 0 & X_1 & -Z_2 & 0 & X_2 & \cdots & -Z_k & 0 & X_k \\ Y_1 & -X_1 & 0 & Y_2 & -X_2 & 0 & \cdots & Y_k & -X_k & 0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & X_2 & Y_2 & Z_2 & \cdots & X_k & Y_k & Z_k \end{pmatrix}$$

2. **Defecto de rango 6.**

- **Origen:** no definido.
- **Orientación:** no definida.
- **Escala:** definida.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & Z_1 & -Y_1 & 0 & Z_2 & -Y_2 & \cdots & 0 & Z_k & -Y_k \\ -Z_1 & 0 & X_1 & -Z_2 & 0 & X_2 & \cdots & -Z_k & 0 & X_k \\ Y_1 & -X_1 & 0 & Y_2 & -X_2 & 0 & \cdots & Y_k & -X_k & 0 \end{pmatrix}$$

3. **Defecto de rango 4.**

- **Origen:** definido.
 - **Orientación:** no definida.
 - **Escala:** no definida.
-

$$E = \begin{pmatrix} 0 & Z_1 & -Y_1 & 0 & Z_2 & -Y_2 & \cdots & 0 & Z_k & -Y_k \\ -Z_1 & 0 & X_1 & -Z_2 & 0 & X_2 & \cdots & -Z_k & 0 & X_k \\ Y_1 & -X_1 & 0 & Y_2 & -X_2 & 0 & \cdots & Y_k & -X_k & 0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & X_2 & Y_2 & Z_2 & \cdots & X_k & Y_k & Z_k \end{pmatrix}$$

4. Defecto de rango 4.

- **Origen:** no definido.
- **Orientación:** definida.
- **Escala:** no definida.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & X_2 & Y_2 & Z_2 & \cdots & X_k & Y_k & Z_k \end{pmatrix}$$

5. Defecto de rango 3.

- **Origen:** definido.
- **Orientación:** no definida.
- **Escala:** definida.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & Z_1 & -Y_1 & 0 & Z_2 & -Y_2 & \cdots & 0 & Z_k & -Y_k \\ -Z_1 & 0 & X_1 & -Z_2 & 0 & X_2 & \cdots & -Z_k & 0 & X_k \\ Y_1 & -X_1 & 0 & Y_2 & -X_2 & 0 & \cdots & Y_k & -X_k & 0 \end{pmatrix}$$

6. Defecto de rango 3.

- **Origen:** no definido.
- **Orientación:** definida.
- **Escala:** definida.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Defecto de rango 1.

- **Origen:** definido.
- **Orientación:** definida.
- **Escala:** no definida.

$$E = (X_1 \ Y_1 \ Z_1 \ X_2 \ Y_2 \ Z_2 \ \cdots \ X_k \ Y_k \ Z_k)$$

2.6.2. Redes planimétricas

Se parte de los postulados siguientes:

- Coordenadas del punto i : (X_i, Y_i) .
- Vector de incógnitas: $x = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k)^T$
- Relación entre parámetros: $x = X - X_0$
- Solución (mejor estimación insesgada): $\hat{X} = X_0 + \hat{x}$

Se considerarán diferentes casos a su vez:

1. Defecto de rango 4. Red completamente libre. No está definido ninguno de los parámetros que caracteriza la red, es decir:

- **Origen:** no definido.
- **Orientación:** no definida.
- **Escala:** no definida.

Ejemplo: Triangulación pura.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ Y_1 & -X_1 & Y_2 & -X_2 & \cdots & Y_k & -X_k \\ X_1 & Y_1 & X_2 & Y_2 & \cdots & X_k & Y_k \end{pmatrix}$$

2. Defecto de rango 3.

- **Origen:** no definido.

- **Orientación:** no definida.
- **Escala:** definida.

Ejemplos:

- Trilateración pura.
- Triangulación + D distancias medidas ($D \geq 1$).

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ Y_1 & -X_1 & Y_2 & -X_2 & \cdots & Y_k & -X_k \end{pmatrix}$$

3. Defecto de rango 3.

- **Origen:** no definido.
- **Orientación:** definida.
- **Escala:** no definida.

Ejemplo: Triangulación con acimut conocido.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ X_1 & Y_1 & X_2 & Y_2 & \cdots & X_k & Y_k \end{pmatrix}$$

4. Defecto de rango 2.

- **Origen:** no definido.
- **Orientación:** definida.
- **Escala:** definida.

Ejemplo: Trilateración con acimut conocido.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Defecto de rango 2.

- **Origen:** definido.
- **Orientación:** no definida.

- **Escala:** no definida.

Ejemplo: Triangulación con un punto fijo.

$$E = \begin{pmatrix} Y_1 & -X_1 & Y_2 & -X_2 & \cdots & Y_k & -X_k \\ X_1 & Y_1 & X_2 & Y_2 & \cdots & X_k & Y_k \end{pmatrix}$$

6. Defecto de rango 1.

- **Origen:** definido.
- **Orientación:** no definida.
- **Escala:** definida.

Ejemplos:

- Triangulación con un punto fijo + D distancias medidas ($D \geq 1$).
- Trilateración con un punto fijo.

$$E = \begin{pmatrix} Y_1 & -X_1 & Y_2 & -X_2 & \cdots & Y_k & -X_k \end{pmatrix}$$

7. Defecto de rango 1.

- **Origen:** definido.
- **Orientación:** definida.
- **Escala:** no definida.

Ejemplo: Triangulación con un punto fijo y un acimut conocido.

$$E = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & X_2 & Y_2 & \cdots & X_k & Y_k \end{pmatrix}$$

2.6.3. Redes altimétricas

En el caso de redes altimétricas, al ser unidimensionales, solamente hay un parámetro indeterminado. Se parte de:

- Coordenadas del punto i : (H_i) .
- Vector de incógnitas: $x = (h_1, h_2, \dots, h_k)^T$

- Relación entre parámetros: $h = H - H_0$
- Solución (mejor estimación insesgada): $\hat{H} = H_0 + \hat{h}$

Esta vez sólo hay una posibilidad:

Defecto de rango 1.

- **Origen de altitudes:** no definido.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es evidente que el defecto de rango de la matriz de diseño de una red altimétrica libre será igual a la unidad. Esta indeterminación se corresponde geoméricamente con una traslación en sentido de medición de las altitudes (vertical) y módulo igual a la cota (desconocida) del *Datum* o *punto fundamental* altimétrico.

2.6.4. Método algebraico

Otra forma diferente de hallar la matriz de constreñimientos consiste en abordar el problema desde el punto de vista del álgebra. De forma que, si se determina una matriz E que cumpla las condiciones impuestas al inicio del apartado 2.5.1:

- $F_2(X) = 0$
- $P_2 \rightarrow \infty$
- $Ex = 0$

Y la consecuencia que se deriva de estas condiciones:

- $NE^T = 0 \Leftrightarrow AE^T = 0$

Donde E es una matriz de rango completo, independiente de N y con el mismo número de filas que el defecto de rango de N .

Pues bien, dado que la matriz N es de rango incompleto, como se demostró en el punto 3 del apartado 2.5.4, esta matriz poseerá un número igual a su defecto de rango de valores propios nulos. Consecuentemente, habrá un vector propio no nulo por cada uno de los valores propios nulos.

Los valores propios nulos evidentemente cumplen:

$$N\mu_j = 0 \quad \text{con } j = 1, \dots, d$$

siendo d el defecto de rango de N . Por lo tanto:

$$N \{ v_1 \mid v_2 \mid v_3 \mid \dots \mid v_d \} = 0$$

Siendo los v_j los vectores propios correspondientes a los valores propios nulos μ_j . Y por tanto:

$$E^T = \{ v_1 \mid v_2 \mid v_3 \mid \dots \mid v_d \} \implies$$

$$E = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \\ \vdots \\ v_d^T \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Otra forma de obtener la matriz E es darse cuenta de que estos vectores propios constituyen el núcleo $Ker(f)$ de la aplicación lineal⁹:

$$x \xrightarrow{f} t$$

Donde la matriz que define la aplicación es N . La forma de determinar los vectores del núcleo de la aplicación lineal consiste en resolver la ecuación:

$$Nx = 0$$

Los vectores determinados por este procedimiento colocados por filas constituyen la matriz E , es decir, la misma que la determinada por el método anterior.

Ya sea de una forma o de otra, con el método algebraico se llega a una matriz E diferente a la deducida por los métodos geométricos. Sin embargo, dado que junto con N cumple las condiciones mínimo cuadráticas impuestas, la matriz pseudoinversa:

$$N^+ = (A^T P A + E^T E)^{-1} - E^T (E E^T)^{-1} (E E^T)^{-1} E$$

⁹El núcleo de una aplicación lineal son aquellos vectores cuya imagen es igual a 0.

será idéntica cuando se determine por métodos geométricos a cuando se halle por el método algebraico.

La ventaja fundamental del método algebraico estriba en dos cuestiones:

- No es necesario conocer los condicionantes geométricos de la red. Una vez determinada la matriz N , se calculan los vectores propios correspondientes a valores propios nulos y esto determina directamente la matriz E .
- Es aplicable a cualquier tipo de red con un procedimiento análogo. Es decir, no hay que particularizar un método para cada tipo de red. Por lo tanto, es más fácilmente programable.

2.7. Parámetros de error de una red geodésica libre

2.7.1. Error medio cuadrático de una observación aislada

Se parte de una expresión de $\hat{v}^T P \hat{v}$ obtenida según lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \hat{v}^T P \hat{v} &= (A\hat{x} - t)^T P (A\hat{x} - t) = \\
 &= (\hat{x}^T A^T - t^T) (PA\hat{x} - Pt) = \\
 &= \hat{x}^T A^T PA\hat{x} - \hat{x}^T A^T Pt - t^T PA\hat{x} + t^T Pt = \\
 &= \hat{x}^T A^T PA\hat{x} - 2t^T PA\hat{x} + t^T Pt = \\
 &= \hat{x}^T N\hat{x} - 2d^T \hat{x} + t^T Pt = \hat{x}^T N\hat{x} - 2\hat{x}^T N\hat{x} + t^T Pt = \\
 &= t^T Pt - \hat{x}^T N\hat{x}
 \end{aligned}$$

Utilizando las propiedades de la traza y la esperanza matemáticas vistas en el apéndice D, obsérvese ahora a qué es igual el valor esperado de $v^T P v$

$$\begin{aligned}
 E[v^T P v] &= E[t^T Pt - x^T N x] = \\
 &= E[Tr(t^T Pt) - Tr(x^T N x)] = E[Tr(tt^T P) - Tr(xx^T N)] = \\
 &= Tr(E[tt^T P]) - Tr(E[xx^T N]) = \\
 &= Tr(E[tt^T P]) - Tr(E[N^+ A^T P t t^T P A N^+ N])
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Recordando y teniendo en cuenta que:

- Del modelo estocástico $E[v] = 0$ y $E[t] = Ax$
- $t = l - L_0 \Rightarrow \Sigma_{tt} = \Sigma_{ll} = \sigma_0^2 P^{-1}$
- $v = L - l$
- $t = l - L_0 \Rightarrow E[t] = E[l] - L_0$
- $t - E[t] = l - E[l] = l - L = -v$
- $vv^T = (-v)(-v)^T = (t - E[t])(t - E[t])^T$
- $E[tt^T] = \Sigma_{tt} + E[t]E[t]^T$ ¹⁰

A continuación se determinará cuál es el valor de $E[tt^T]$

$$\begin{aligned}
 E[vv^T] &= E[(t - E[t])(t - E[t])^T] = \\
 &= E[tt^T - tE[t]^T - E[t]t^T + E[t]E[t]^T] = \\
 &= E[tt^T] - E[t]E[t]^T = \Sigma_{tt} + E[t]E[t]^T - E[t]E[t]^T = \\
 &= \Sigma_{tt} = \sigma_0^2 P^{-1}
 \end{aligned}$$

despejando de la anterior expresión queda

$$E[tt^T] = \sigma_0^2 P^{-1} + E[t]E[t]^T = \sigma_0^2 P^{-1} + Axx^T A$$

de donde

$$E[tt^T P] = E[tt^T] P = (\sigma_0^2 P^{-1} + Axx^T A^T) P = \sigma_0^2 I_{mm} + Axx^T A^T P$$

y también por otro lado

$$\begin{aligned}
 E[N^+ A^T P t t^T P A N^+ N] &= N^+ A^T P E[tt^T P] A N^+ N = \\
 &= N^+ A^T P (\sigma_0^2 I_{mm} + Axx^T A^T P) A N^+ N = \\
 &= N^+ A^T P A N^+ N \sigma_0^2 + N^+ A^T P A x x^T A^T P A N^+ N = \\
 &= N^+ N N^+ N \sigma_0^2 + N^+ N x x^T A^T P A N^+ N
 \end{aligned}$$

aplicando los resultados de las ecuaciones (2.26) y (2.33)

¹⁰Veáse página 23 de la referencia [Sevilla, 2005].

$$\begin{aligned}
E \left[N^+ A^T P t t^T P A N^+ N \right] &= \\
&= \sigma_0^2 [I_{nn} - E^T (E E^T)^{-1} E]^2 + \\
&+ [I_{nn} - E^T (E E^T)^{-1} E] x x^T A^T P A [I_{nn} - E^T (E E^T)^{-1} E] = \\
&= \sigma_0^2 T_E^2 + T_E x x^T A^T P A T_E
\end{aligned}$$

Por otro lado, la matriz T_E es idempotente:

$$\begin{aligned}
T_E^2 &= [I_{nn} - E^T (E E^T)^{-1} E]^2 = \\
&= [I_{nn} - E^T (E E^T)^{-1} E] [I_{nn} - E^T (E E^T)^{-1} E] = \\
&= I_{nn} - E^T (E E^T)^{-1} E - E^T (E E^T)^{-1} E + E^T (E E^T)^{-1} E E^T (E E^T)^{-1} E = \\
&= I_{nn} - E^T (E E^T)^{-1} E - E^T (E E^T)^{-1} E + E^T (E E^T)^{-1} E = \\
&= I_{nn} - E^T (E E^T)^{-1} E = T_E
\end{aligned}$$

y volviendo a la expresión (2.46)

$$\begin{aligned}
E \left[\hat{v}^T P \hat{v} \right] &= Tr \left(E \left[t t^T P \right] \right) - Tr \left(E \left[N^+ A^T P t t^T P A N^+ N \right] \right) = \\
&= Tr \left(\sigma_0^2 I_{mm} + A x x^T A^T P \right) - \sigma_0^2 Tr(T_E^2) - Tr(T_E x x^T A^T P A T_E) = \\
&= \sigma_0^2 Tr(I_{mm}) + Tr \left(A x x^T A^T P \right) - \sigma_0^2 Tr(T_E^2) - Tr(x x^T A^T P A T_E^2) = \\
&= m \sigma_0^2 + Tr \left(A x x^T A^T P \right) - \sigma_0^2 Tr(T_E) - Tr(x x^T A^T P A T_E) = \\
&= m \sigma_0^2 + Tr \left(A x x^T A^T P \right) - \sigma_0^2 Tr(T_E) - Tr(x x^T A^T P A) + \\
&+ Tr(x x^T A^T P A E^T (E E^T)^{-1} E) =
\end{aligned}$$

aplicando la ecuación (2.16) del apartado 2.5.1

$$\begin{aligned}
&= m \sigma_0^2 + Tr \left(A x x^T A^T P \right) - \sigma_0^2 Tr(T_E) - Tr \left(A x x^T A^T P \right) = \\
&= m \sigma_0^2 - \sigma_0^2 Tr(T_E) = \\
&= m \sigma_0^2 - \sigma_0^2 Tr(I_{nn}) + \sigma_0^2 Tr(E^T (E E^T)^{-1} E)
\end{aligned}$$

como es fácilmente demostrable que $Tr(E^T (E E^T)^{-1} E) = R(A)$

$$\begin{aligned}
E \left[\hat{v}^T P \hat{v} \right] &= \\
&= m \sigma_0^2 - n \sigma_0^2 + R(A) \sigma_0^2 = \\
&= m \sigma_0^2 - [n - R(A)] \sigma_0^2 = \\
&= [m - R(A)] \sigma_0^2
\end{aligned}$$

entonces si se toma como estimador

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{m - R(A)} \quad (2.47)$$

resulta ser un estimador insesgado

$$E[\hat{\sigma}_0^2] = \frac{E[\hat{v}^T P \hat{v}]}{m - R(A)} = \frac{[m - R(A)] \sigma_0^2}{m - R(A)} = \sigma_0^2$$

De esta forma queda demostrado que existe un estimador insesgado de la varianza. Éste representa una estimación a posteriori de la varianza del observable de peso unidad.

Por lo tanto, la estimación a posteriori de la desviación típica del observable de peso unidad, también conocida como *error medio cuadrático de una observación aislada*, resulta ser:

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{m - R(A)}} \quad (2.48)$$

2.7.2. Matriz de varianzas-covarianzas

Según se demuestra en el apartado A.3.5 del apéndice A, en el modelo estocástico quedan definidas las matrices cofactor y de varianzas-covarianzas de las observaciones y los términos independientes:

$$Q_{ll} = Q_{tt} = P^{-1}$$

Para obtener la matriz cofactor de las incógnitas se aplicará la ley de propagación de las varianzas-covarianzas (apéndice B):

$$\begin{aligned} \hat{x} &= N^+ A^T P t \Rightarrow \\ \Rightarrow Q_{\hat{x}\hat{x}} &= N^+ A^T P Q_{tt} P A N^+ = \\ &= N^+ A^T P P^{-1} P A N^+ = \\ &= N^+ A^T P A N^+ = N^+ N N^+ = N^+ \end{aligned} \quad (2.49)$$

Consecuentemente, la matriz de varianzas-covarianzas de las incógnitas ajustadas es

$$\Sigma_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 N^+ \quad (2.50)$$

Esta matriz representa los errores en cada una de las variables (varianzas) así como la relación lineal entre las variables tomadas dos a dos (covarianzas). Es una matriz simétrica de dimensiones $n \times n$ y su expresión matemática es la siguiente:

$$\Sigma_{\hat{x}\hat{x}} = \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1x_2} & \sigma_{x_1x_3} & \cdots & \sigma_{x_1x_{n-1}} & \sigma_{x_1x_n} \\ \sigma_{x_1x_2} & \sigma_{x_2}^2 & \sigma_{x_2x_3} & \cdots & \sigma_{x_2x_{n-1}} & \sigma_{x_2x_n} \\ \sigma_{x_1x_3} & \sigma_{x_2x_3} & \sigma_{x_3}^2 & \cdots & \sigma_{x_3x_{n-1}} & \sigma_{x_3x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{x_1x_{n-1}} & \sigma_{x_2x_{n-1}} & \sigma_{x_3x_{n-1}} & \cdots & \sigma_{x_{n-1}}^2 & \sigma_{x_{n-1}x_n} \\ \sigma_{x_1x_n} & \sigma_{x_2x_n} & \sigma_{x_3x_n} & \cdots & \sigma_{x_{n-1}x_n} & \sigma_{x_n}^2 \end{pmatrix}$$

2.7.3. Figuras de Error

El presente apartado está extraído de las páginas 119 a 122 referencia [De la Puente, 2011].

Las figuras de error dan una idea directa e intuitiva de la precisión alcanzada en el ajuste. En la inmensa mayoría de los casos tiene especial importancia, ya que con el estudio de las elipses absolutas de error se obtiene una idea suficiente de la validez de la observación y de la precisión conseguida en las coordenadas.

Como a continuación se demostrará, las elipses absolutas de error, tienen el único pequeño inconveniente de estar ligadas al sistema de referencia (*datum*). Ello se soslaya en el caso de redes libres ya que al realizar su ajuste con constreñimiento mínimo, las elipses absolutas de error no están *constreñidas* en modo alguno por la precisión de las coordenadas en las que se apoyan.

La métrica del espacio de parámetros

Al igual que la matriz $P = Q_u^{-1}$ define la métrica del espacio de observaciones:

$$\Sigma_{ll} = \sigma_0^2 P^{-1} \Rightarrow P = \sigma_0^2 \Sigma_{ll}^{-1}$$

La métrica en el espacio de parámetros se obtiene mediante el tensor métrico:

$$N = \sigma_0^2 \Sigma_{xx}^{-1}$$

Elipses absolutas estándar de error

Obtenida la estimación de las varianzas-covarianzas, y con el concepto de métrica en el espacio de las incógnitas o parámetros, se procederá a obtener las figuras de error absolutas.

Para ello se toma de la matriz las varianzas-covarianzas, las que correspondan de forma exclusiva a las coordenadas de cada punto, *ignorando* la influencia de otras fuentes estimadas de error en dichas coordenadas (reflejadas en las correspondientes covarianzas).

Ejemplo: Para el punto A , se obtiene de la matriz de varianzas-covarianzas

$$\Sigma_{\hat{x}\hat{x}_A} = \begin{pmatrix} \sigma_{X_A}^2 & \sigma_{X_A Y_A} \\ \sigma_{Y_A X_A} & \sigma_{Y_A}^2 \end{pmatrix}$$

Ésta es una matriz simétrica y definida positiva (la matriz N lo es), y por tanto diagonalizable.

Cálculo de la elipse absoluta de un punto

Por una parte se tiene el vector estimado correspondiente al punto A , valor más probable de las incógnitas procedente del ajuste, y que es un *vector fijo* que se denotará como \hat{X}_A . Ese vector, será calculado con un determinado vector error x_A . Empleando la notación para X_A , para denominar a un resultado cualquiera que saldría con otro vector observación distinto y en las mismas condiciones:

$$X_A = \hat{X}_A + x_A$$

Calculando el lugar geométrico (conjunto de vectores) X_A , tales que la distancia (norma de x_A) al vector \hat{X}_A sea menor que una desviación estándar de peso unidad de un parámetro aislado:

$$\|X_A - \hat{X}_A\|^2 \leq \sigma_0^2$$

Para ello se emplea la métrica del espacio de parámetros, con la matriz de varianzas-covarianzas estimada ($\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} = \hat{\sigma}_0^2 N$), no existiendo necesidad de conocer el parámetro σ_0^2 para el conocimiento del área de error, según lo siguiente:

$$(X_A - \hat{X}_A)^T \hat{\sigma}_0^2 \Sigma_{\hat{x}\hat{x}_A}^{-1} (X_A - \hat{X}_A) \leq \sigma_0^2$$

$$(X_A - \hat{X}_A)^T \Sigma_{\hat{x}\hat{x}_A}^{-1} (X_A - \hat{X}_A) \leq \frac{\sigma_0^2}{\hat{\sigma}_0^2} \cong 1$$

Así pues, empleando la matriz de varianzas-covarianzas estimada de parámetros, y suponiendo la necesaria compatibilidad estadística entre los parámetros σ_0^2 y $\hat{\sigma}_0^2$, resulta:

$$(X_A - \hat{X}_A)^T \Sigma_{\hat{x}\hat{x}_A}^{-1} (X_A - \hat{X}_A) \leq 1 \quad (2.51)$$

Resultando ser ésta, el área comprendida en el interior de una elipse, cuyo centro está en el punto A y cuyos ejes corresponden a las direcciones de los autovectores de la matriz $\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}^{-1}$, asociada de la forma cuadrática.

La ecuación reducida al centro de la elipse y a sus ejes propios tendrá la forma¹¹:

$$\begin{pmatrix} x'' & y'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_x'^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_y'^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \frac{x''^2}{\sigma_x'^2} + \frac{y''^2}{\sigma_y'^2} = 1$$

Dado que se está trabajando con la matriz inversa de la de varianzas-covarianzas, se puede escribir:

$$\Sigma_{x''y''} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_x'^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_y'^2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_x'^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y'^2 \end{pmatrix}$$

Por todo ello puede concluirse que la figura de error queda geoméricamente determinada, resultando inmediato que:

- Los autovalores $M = \sigma_x'^2$ y $N = \sigma_y'^2$ determinan los semiejes de la elipse de error.
- La dirección de los ejes de la elipse la dan las direcciones de los autovectores que corresponden a los respectivos autovalores.

En torno a las coordenadas ajustadas, y dentro de esa área, se puede decir que la probabilidad de que se encuentre la realidad física del punto es de $\cong 69\%$, tal y como corresponde a una desviación estándar.

2.8. Defecto de rango en redes libres

Hasta ahora se ha dado por supuesto la posibilidad de que la matriz de diseño de una red con superabundancia de observaciones pueda tener

¹¹La doble comilla sobre las variables x e y indica el doble cambio de base al sistema de ejes propios: Traslación y giro.

defecto de rango. Pero, habiendo más observaciones que incógnitas y si estas son las suficientes para resolver el problema geométrico, ¿por qué y en qué casos se produce ese defecto de rango?

Pues bien, para dar respuesta a esta pregunta se procederá a plantear un ejemplo de una red mínima que, a pesar de no tratarse de un caso general, sí constituye una forma muy gráfica de resolver la cuestión.

Supóngase que sobre la red planimétrica expuesta en la figura 2.1 se dispone de las observaciones de la siguiente tabla:

Ángulos	Distancias
A_I	D_{AB}
A_D	D_{AC}
B_I	D_{AD}
B_D	D_{BC}
C_I	D_{BD}
C_D	D_{CD}
D_I	
D_D	

Evidentemente el problema geométrico está resuelto puesto que se dispone de 14 observaciones y con tan solo 4 se puede resolver geoméricamente como se verá más adelante. Esto se traduce en lo siguiente: si se dispusiera de las 4 observaciones necesarias, por ejemplo, de una sola distancia (D_{AB}) y de 3 ángulos (por ejemplo $A = A_I + A_D$, B_D y D_I), mediante el procedimiento geométrico de resolución de triángulos, se tienen los datos necesarios y suficientes para resolver la figura de la siguiente forma:

- Resolución del triángulo ABD :

Con los ángulos B_I y $A = A_I + A_D$ se determinan las distancias D_{AD} y D_{BD} y el ángulo D_D .

- Resolución del triángulo BCD :

Con los ángulos B_D y D_I se determinan las distancias D_{BC} y D_{CD} y el ángulo $C = C_I + C_D$.

Llegados a este punto se dispone de todos los datos necesarios para deducir la distancia restante: D_{AC} .

- Resolución del triángulo ABC :

Con el ángulo $B = B_I + B_D$ y las distancias D_{AB} y D_{BC} se determinan los ángulos A_D y C_I .

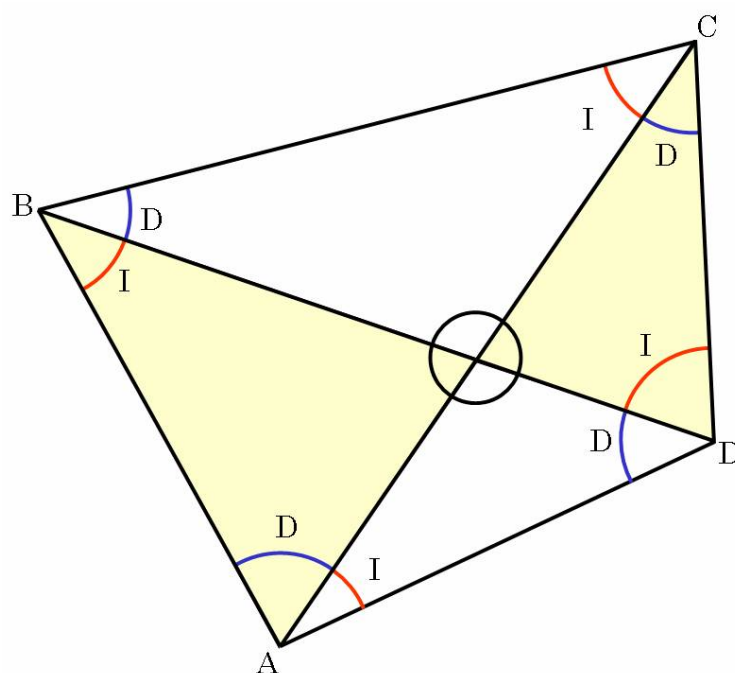


Figura 2.1: Ejemplo de red de 4 vértices.

- Resolución de los ángulos A y C :

Mediante diferencias se determinan los ángulos $A_I = A - A_D$ y $C_D = C - C_I$.

Con lo cual, la figura estaría resuelta con 4 observaciones por lo que las 10 restantes serían, en principio, superabundantes. Realmente, esas 10 observaciones de más no aportan nada a la resolución geométrica del problema puesto que, como se ha visto, se pueden ir deduciendo al resolver la figura completa. Por lo tanto, aunque se disponga de ellas e incluso de otros 10 millones más de observaciones, seguiría siendo imposible la determinación de las coordenadas por este procedimiento. Se necesitaría conocimiento sobre las coordenadas de los puntos. Y la razón es que dichas coordenadas son simplemente arbitrarias, es decir dependiendo de dónde se coloque su origen con respecto a la figura y su orientación, éstas variarían radicalmente.

En resumen, si las incógnitas del sistema son las coordenadas de los puntos en lugar de los ángulos y distancias de la figura, haría falta tres datos adicionales para su resolución, como se ha deducido. Estos datos materializan geoméricamente la distancia (X_0 e Y_0) de un punto de la figura al origen de coordenadas adoptado y la orientación (θ) de la figura

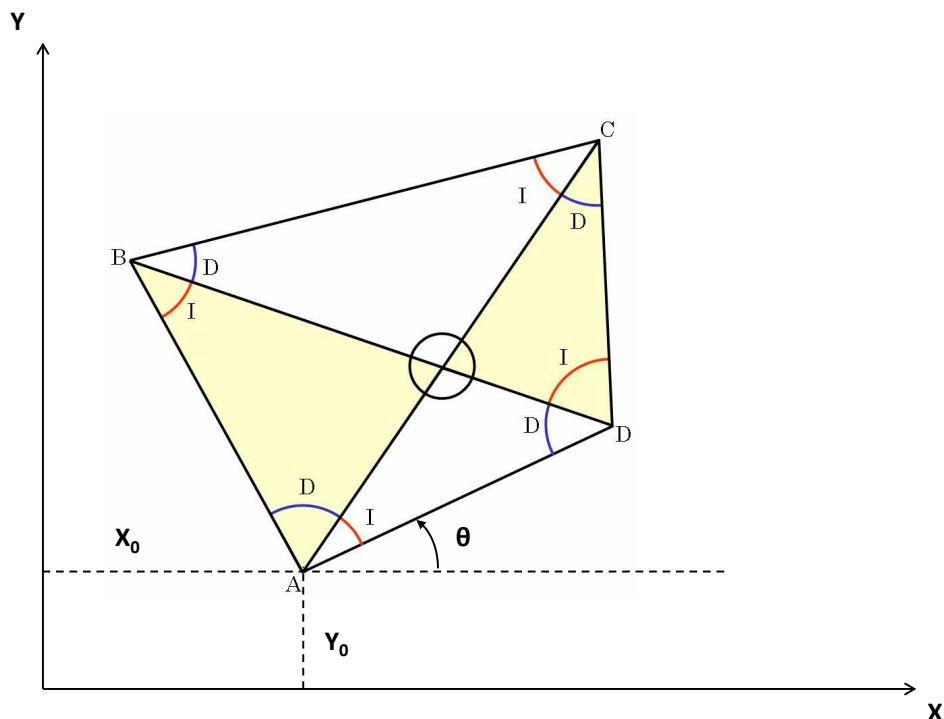


Figura 2.2: Defecto de rango desde el punto de vista geométrico.

en dicho sistema de coordenadas. Como se puede observar en la figura 2.2. Consecuentemente, a pesar de la superabundancia de observaciones, si no se dispone de ninguno de estos 3 datos, el defecto de rango de la matriz A que define geoméricamente la red sería 3. Esto se traduce en que de filas de la matriz A , materializadas por las ecuaciones de observación, solamente 5 serían linealmente independientes. Como las incógnitas de la red son 8 (X e Y de cada punto), el defecto de rango de la matriz A resulta ser igual a 3.

Como conclusión, este resultado es exportable a redes no definidas geoméricamente con respecto a un sistema de coordenadas, como la red objeto del presente trabajo, pudiéndose expresar las siguientes afirmaciones:

- La necesidad de datos externos a lo puros observables si lo que se quiere es referir una red a un determinado sistema de coordenadas.
- Si únicamente se desea resolver geoméricamente la red, no serían

necesarios datos sobre las coordenadas de ningún punto sino al menos, los condicionamientos geométricos mínimos que la definen.

Apartado 3

Material y metodología

3.1. Material

3.1.1. Material Topográfico

La instrumentación topográfica básica empleada es el teodolito Wild T-2 con distanciómetro Di-20.

El error en la medida de las direcciones con el teodolito Wild T-2 es de aproximadamente 8^{cc} . Este valor se obtuvo de la práctica II del 30 Curso de Geodesia en la que se hicieron 30 mediciones a una misma señal deduciéndose dicho error teórico. Asimismo, en las sucesivas prácticas del curso se ha ido constatando que los resultados siempre han sido coherentes con esa suposición. Esto se ha deducido mediante los errores extraídos de los estadillos usados y en otras ocasiones suponiendo que el error cometido era de los citados 8^{cc} conduciendo a resultados correctos. Consecuentemente, dado que un ángulo está materializado por la diferencia de dos lecturas, el error teórico en la medida de los ángulos será el siguiente:

$$A = L_A - L_B$$

Siendo A el ángulo y L_A y L_B las lecturas que lo constituyen. Por la fórmula de transmisión de errores (como se demuestra en el apéndice E: "Fórmula de la transmisión de errores"):

$$emc_A^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial L_A} \right)^2 emc_{L_A}^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial L_B} \right)^2 emc_{L_B}^2 = emc_{L_A}^2 + emc_{L_B}^2$$

Donde emc_A , emc_{L_A} y emc_{L_B} son los errores medios cuadráticos en el ángulo A , la lectura al punto A : L_A y la lectura al punto B : L_B respectivamente.

Como $emc_{LA} = emc_{LB} = emc_L$, es decir, los 8^{cc} mencionados.

$$emc_A^2 = 2 \cdot emc_L^2$$

Finalmente se deduce:

$$emc_A = \sqrt{2} \cdot emc_L = \sqrt{2} \cdot 8^{cc} = 11^{cc}$$

Por otro lado el error teórico en la medida de las distancias es el que proporciona la casa constructora del distanciómetro:

$$emc_d = 5mm + 1ppm^1 \quad (3.1)$$

3.1.2. Software

Se empleó como programa de cálculo la aplicación Microsoft Excel, con el complemento matricial *Matrix.xla*. Se trata de un software libre que se puede descargar a través de internet en la dirección web de la referencia [<http://digilander.libero.it/foxes>].

3.2. Metodología

3.2.1. Proyecto de Campo

Se observó una red de siete vértices situada próxima al acuartelamiento Alfonso X, sede del Departameto de Geodesia y Topografía, al suroeste de Madrid. Esta red está constituida por señales de aproximadamente 1,20 metros de altura desde la base del pilar. Los vértices carecen de centrado forzado. Constituyen pues, una muy buena señalización a efectos de puntería sin embargo, al carecer de centrado forzado, puede haber errores accidentales en los estacionamientos difíciles de estimar. La geometría de la red definida por los vértices es la que se observa en el croquis de la figura 3.1. En total se realizaron 24 observaciones de dirección y 5 de distancia.

3.2.2. Observación

Los resultados son únicamente planimétricos. Se procedió a la observación diurna con estacionamiento en seis de los siete vértices y lectura

¹1ppm=1 parte por millón. Por cada kilómetro de distancia, el error en su medida se incrementa 1mm.

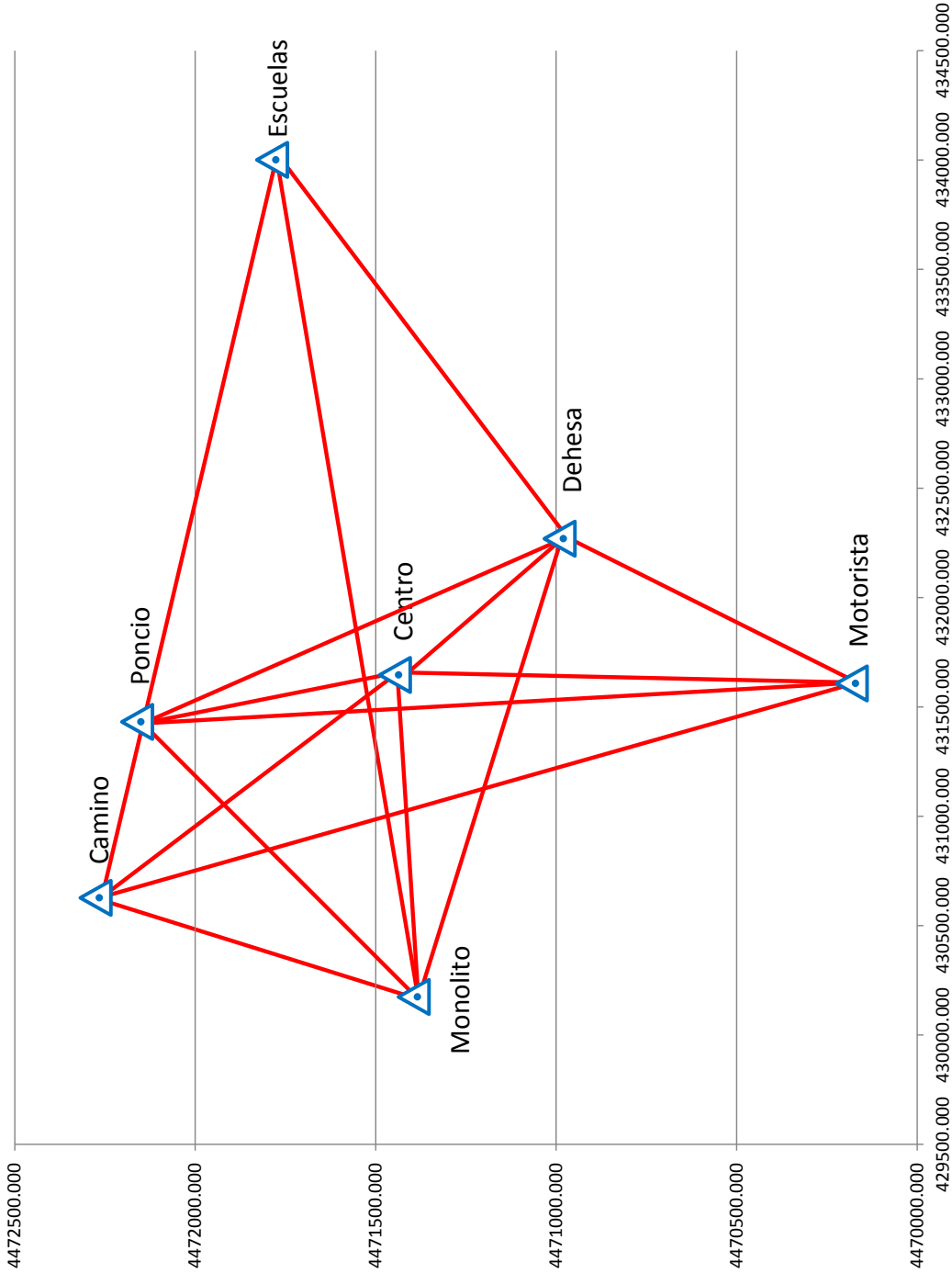


Figura 3.1: Croquis inicial con las visuales materializadas entre cada punto de la red.

angular a algunos de los restantes. Asimismo, se hicieron cinco mediciones distanciométricas entre ciertos puntos de la red. El método de observación ha sido el de una sola vuelta de horizonte y aplicando la regla de Bessel. Para evitar el movimiento del teodolito con la colocación del distanciómetro, se realizó una segunda vuelta en el caso de las mediciones distanciométricas.

Los datos obtenidos de campo son los reflejados en el cuadro 3.1. Se trata de lecturas horizontales L_H , distancias geométricas D_g y ángulos cenitales V para pasar estas distancias a distancias reducidas D_r .

3.2.3. Cálculos previos

El sistema geodésico empleado para dar las coordenadas de los vértices es ETRS89. Como la compensación de la red se realizará por el procedimiento de *Red Libre*, estas coordenadas serán consideradas como aproximadas lo cual será necesario para el planteamiento de ecuaciones de observación.

Las coordenadas de los puntos necesarias para el planteamiento por ecuaciones de observación están dadas en proyección UTM² y son las que se reflejan en el cuadro 3.2. Al tratarse de 7 puntos de coordenadas planimétricas supuestas desconocidas: $n = 14$ (2 incógnitas X e Y por cada punto).

Con las premisas del párrafo anterior, la red es libre con 1 solo constreñimiento; las distancias, que sirven para dar dimensión a la red. Consecuentemente, se podrá evaluar la observación independientemente del datum (sistema de coordenadas). No obstante, para la resolución del sistema, es necesario añadir la matriz de constreñimientos por tratarse de una red libre. Puesto que se suponen todos los puntos desconocidos y se parte de 1 o más distancias conocidas, la matriz de constreñimientos tendrá la forma deducida en el caso 2 del apartado 2.6.2. También se calculará por el método algebraico con la fórmula general para E (2.45) obtenida en apartado 2.6.4. En cualquier caso, el defecto de rango será 3 por lo que las dimensiones de E serán: $3 \times n$.

Con posterioridad, una vez analizada y depurada, en su caso, la observación, y decididos qué puntos se consideran fijos, se podrá constreñir la red basándose en ellos, realizando un ajuste definitivo.

Antes de plantear la matriz de diseño que define la red geodésica, es necesario linealizar las ecuaciones tanto de ángulo como de distancia. Esto se debe a que el modelo de MMCC solamente es válido para sistemas lineales.

²Universal Trasversa de Mercator.

Cuadro 3.1: Observaciones de campo.

Tipo de observación	Estación	Visado	$L_H/D_g/V$
dirección	Centro	Dehesa	206,5268 ^g
dirección	Centro	Motorista	268,4243 ^g
dirección	Centro	Monolito	365,1230 ^g
dirección	Centro	Camino	11,5327 ^g
dirección	Centro	Poncio	50,3153 ^g
dirección	Monolito	Camino	357,6304 ^g
dirección	Monolito	Camino	357,6312 ^g
dirección	Monolito	Poncio	393,1377 ^g
dirección	Monolito	Escuelas	21,9971 ^g
dirección	Monolito	Centro	26,1557 ^g
dirección	Monolito	Centro	26,1560 ^g
dirección	Camino	Centro	75,2600 ^g
dirección	Camino	Monolito	160,3252 ^g
dirección	Escuelas	Monolito	194,1698 ^g
dirección	Escuelas	Poncio	210,1532 ^g
dirección	Dehesa	Motorista	194,2388 ^g
dirección	Dehesa	Monolito	262,3057 ^g
dirección	Dehesa	Centro	289,4061 ^g
dirección	Dehesa	Camino	292,5430 ^g
dirección	Dehesa	Poncio	310,8079 ^g
dirección	Motorista	Centro	340,9947 ^g
dirección	Motorista	Dehesa	383,9295 ^g
dirección	Motorista	Camino	311,7974 ^g
dirección	Motorista	Poncio	334,2209 ^g
distancia	Monolito	Centro	1464,930 ^m
ángulo cenital	Monolito	Centro	101,0347 ^g
distancia	Motorista	Dehesa	1045,659 ^m
ángulo cenital	Motorista	Dehesa	100,3968 ^g
distancia	Centro	Monolito	1464,934 ^m
ángulo cenital	Centro	Monolito	98,9984 ^g
distancia	Dehesa	Motorista	1045,651 ^m
ángulo cenital	Dehesa	Motorista	99,6422 ^g
distancia	Monolito	Escuelas	3872,619 ^m
ángulo cenital	Monolito	Escuelas	100,6616 ^g

Cuadro 3.2: Coordenadas previas (ETRS89).

Nombre del punto	X	Y
Centro	431526,019m	4471218,713m
Monolito	430063,084m	4471160,663m
Camino	430503,532m	4472061,484m
Escuelas	433912,522m	4471566,203m
Dehesa	432173,163m	4470765,785m
Motorista	431510,622m	4469957,404m
Poncio	431322,648m	4471947,291m

Linealización de ecuación de ángulo

Las ecuaciones de ángulo se obtienen como diferencia de dos ecuaciones de dirección. Las ecuaciones de dirección, por otra parte, se obtienen a partir de la fórmula topográfica entre los puntos A y B que relaciona la lectura L_A^B , la orientación del origen del aparato topográfico o desorientación O_{o_A} y la orientación entre los dos puntos O_A^B :

$$L_A^B = F(X) = O_A^B - O_{o_A} = \arctan \frac{\Delta X_A^B}{\Delta Y_A^B} - O_{o_A}$$

Haciendo un desarrollo por serie de Taylor hasta grado uno de la relación funcional anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} F(X) &= F(X_0) + \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]_0 (X - X_0) = F(X_0) + \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]_0 (x) = \\ &= \left[\arctan \frac{\Delta X_A^B}{\Delta Y_A^B} - O_{o_A} \right]_0 + \left(\frac{\partial F(X)}{\partial X_A} \quad \frac{\partial F(X)}{\partial Y_A} \quad \frac{\partial F(X)}{\partial X_B} \quad \frac{\partial F(X)}{\partial Y_B} \quad \frac{\partial F(X)}{\partial O_{o_A}} \right)_0 \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ x_B \\ y_B \\ O_{o_A} \end{pmatrix} = \\ &= \left[\arctan \frac{\Delta X_A^B}{\Delta Y_A^B} - O_{o_A} \right]_0 + \left(\frac{-\Delta Y_A^B}{D_{AB}^2} \quad \frac{\Delta X_A^B}{D_{AB}^2} \quad \frac{\Delta Y_A^B}{D_{AB}^2} \quad \frac{-\Delta X_A^B}{D_{AB}^2} \quad -1 \right)_0 \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ x_B \\ y_B \\ O_{o_A} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ecuación en la que:

- El subíndice $_0$ indica que es una magnitud calculada con los parámetros aproximados.

- Todos los sumandos están en radianes; para trabajar en otras unidades, se introducirá la correspondiente constante de conversión.

En este estudio se ha trabajado en grados centesimales por lo que la constante de conversión será $K = \frac{200}{\pi}$:

$$L_A^B = \left[\arctan \frac{\Delta X_A^B}{\Delta Y_A^B} - O_{o_A} \right]_0 + \left(\frac{-K\Delta Y_A^B}{D_{AB}^2} \quad \frac{K\Delta X_A^B}{D_{AB}^2} \quad \frac{K\Delta Y_A^B}{D_{AB}^2} \quad \frac{-K\Delta X_A^B}{D_{AB}^2} \quad -1 \right)_0 \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ x_B \\ y_B \\ O_{o_A} \end{pmatrix}$$

De la misma forma se procederá para obtener la ecuación de dirección entre el punto de estación A y otro punto visado C resultando:

$$L_A^C = \left[\arctan \frac{\Delta X_A^C}{\Delta Y_A^C} - O_{o_A} \right]_0 + \left(\frac{-K\Delta Y_A^C}{D_{AC}^2} \quad \frac{K\Delta X_A^C}{D_{AC}^2} \quad \frac{K\Delta Y_A^C}{D_{AC}^2} \quad \frac{-K\Delta X_A^C}{D_{AC}^2} \quad -1 \right)_0 \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ x_C \\ y_C \\ O_{o_A} \end{pmatrix}$$

Restando ambas ecuaciones se obtiene la correspondiente ecuación de ángulo. Por lo tanto, el sistema resultante tendrá tantas ecuaciones de ángulo desde cada estacionamiento como visuales se hayan observado desde éste menos una. En la ecuación de ángulo desaparece como incógnita la desorientación del punto de estación. La ecuación tendrá pues la forma siguiente:

$$L_A^C - L_A^B = \left[\arctan \frac{\Delta X_A^C}{\Delta Y_A^C} - O_{o_A} \right]_0 - \left[\arctan \frac{\Delta X_A^B}{\Delta Y_A^B} - O_{o_A} \right]_0 + \left(X_{ABC} \quad Y_{ABC} \quad \frac{-K\Delta Y_A^B}{D_{AB}^2} \quad \frac{K\Delta X_A^B}{D_{AB}^2} \quad \frac{K\Delta Y_A^C}{D_{AC}^2} \quad \frac{-K\Delta X_A^C}{D_{AC}^2} \right)_0 \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ x_B \\ y_B \\ x_C \\ y_C \end{pmatrix}$$

Donde:

$$\begin{cases} X_{ABC} = - \left(\frac{K\Delta Y_A^C}{D_{AC}^2} - \frac{K\Delta Y_A^B}{D_{AB}^2} \right) \\ Y_{ABC} = \left(\frac{K\Delta X_A^C}{D_{AC}^2} - \frac{K\Delta X_A^B}{D_{AB}^2} \right) \end{cases}$$

Dado que:

$$\begin{cases} L_{A_o}^B = \left[\arctan \frac{\Delta X_A^B}{\Delta Y_A^B} - O_{o_A} \right]_0 \\ L_{A_o}^C = \left[\arctan \frac{\Delta X_A^C}{\Delta Y_A^C} - O_{o_A} \right]_0 \end{cases}$$

La ecuación que formará parte de una línea i del sistema, será:

$$\begin{cases} A_i x - t_i = v_i \quad \text{con} \\ \begin{cases} t_i = (l_A^C - l_A^B) - (L_{A_o}^C - L_{A_o}^B) \\ A_i x = \left(X_{ABC} \quad Y_{ABC} \quad \frac{-K\Delta Y_A^B}{D_{AB}^2} \quad \frac{K\Delta X_A^B}{D_{AB}^2} \quad \frac{K\Delta Y_A^C}{D_{AC}^2} \quad \frac{-K\Delta X_A^C}{D_{AC}^2} \right)_0 \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ x_B \\ y_B \\ x_C \\ y_C \end{pmatrix} \end{cases} \end{cases} \quad (3.2)$$

Donde l_A^B y l_A^C son las observaciones de campo. Las observaciones ajustadas se obtendrían finalmente de la forma siguiente:

$$L_A^C - L_A^B = l_A^C - l_A^B + v_i$$

Linealización de ecuación de distancias

A partir de la relación funcional existente entre parámetros (coordenadas) y distancia, y de forma totalmente análoga a lo visto en la ecuación de dirección, se obtiene la ecuación tipo para una observación de distancia. En este caso la magnitud observada será la distancia d_A^B .

Relación funcional entre parámetros y observaciones (una fila del sistema de ecuaciones de una red topográfica):

$$D_A^B = F(X) = \sqrt{\Delta X_A^{B2} + \Delta Y_A^{B2}}$$

Derivando con respecto a las incógnitas y realizando el desarrollo de Taylor hasta orden uno se obtiene:

$$\begin{aligned} F(X) &= F(X_0) + \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]_0 (X - X_0) = F(X_0) + \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]_0 (x) = \\ &= D_{A_0}^B + \left(\frac{\partial F(X)}{\partial X_A} \quad \frac{\partial F(X)}{\partial Y_A} \quad \frac{\partial F(X)}{\partial X_B} \quad \frac{\partial F(X)}{\partial Y_B} \right)_0 \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \\ &= D_{A_0}^B + \left(\frac{-\Delta X_A^B}{D_{AB}} \quad \frac{-\Delta Y_A^B}{D_{AB}} \quad \frac{\Delta X_A^B}{D_{AB}} \quad \frac{\Delta Y_A^B}{D_{AB}} \right)_0 \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ x_B \\ y_B \end{pmatrix} = d_A^B + v \end{aligned}$$

La ecuación, que formará parte de una línea i del sistema, será:

$$\boxed{\begin{aligned} &A_i x - t_i = v_i \quad \text{con} \\ &\left\{ \begin{aligned} &t_i = d_A^B - D_{A_0}^B \\ &A_i x = \left(\frac{-\Delta X_A^B}{D_{AB}} \quad \frac{-\Delta Y_A^B}{D_{AB}} \quad \frac{\Delta X_A^B}{D_{AB}} \quad \frac{\Delta Y_A^B}{D_{AB}} \right)_0 \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ x_B \\ y_B \end{pmatrix} \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (3.3)}$$

Reducción de distancias

Previamente las distancias, se reducen al plano local horizontal, obteniéndose distancias reducidas: para ello se han empleado los datos de observación de ángulos cenitales y distancias geométricas mediante la fórmula:

$$D_r = D_g \sin V$$

Posteriormente, esas distancias en el plano horizontal habrá que proyectarlas sobre el elipsoide de referencia. debido a que las distancias entre

los vértices de la red es inferior en todos los casos a $4000m$ es suficiente la aproximación del elipsoide a una esfera de radio el radio medio del elipsoide entre cada pareja de puntos. Estos radios medios se calculan según la fórmula³:

$$R = \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

En esta fórmula interviene la latitud φ de cada punto que se calculará según las fórmulas de transformación de coordenadas en la proyección UTM a coordenadas geodésicas. Estas fórmulas están publicadas por la "Defense Mapping Agency" en el documento oficial de la referencia: [DMA, 1989].

Una vez obtenido el radio medio de los puntos, se calculará el radio medio entre cada pareja de puntos entre los que se ha medido la distancia. Con estos radios medios y una altura media para la zona de $H_m = 670m$, se aplicará la siguiente fórmula (con la aproximación citada anteriormente) para reducir las distancias al elipsoide D_e :

$$D_e = \frac{R}{R + H_m} D_r$$

Finalmente, para pasar las distancias sobre el elipsoide D_e a distancias en la proyección D_{UTM} se aplicará el coeficiente de deformación lineal K medio entre cada pareja de puntos. Este coeficiente se obtiene también de las fórmulas del documento oficial de la DMA [DMA, 1989]. Se aplicará, por tanto, la siguiente fórmula:

$$D_{UTM} = D_e K$$

Los datos de latitud φ , longitud λ , radio medio R y coeficiente de deformación lineal K obtenidos aplicando las fórmulas de la DMA se resumen en el cuadro 3.3.

Llegados a este punto, ya se dispone de todos los datos necesarios para transformar las distancias tomadas en campo en distancias en la proyección. Esto queda resumido en el cuadro 3.4.

³Según se demuestra en la página 118 de la referencia [Mena, 2000]. Donde a y e son los parámetros que definen al elipsoide (GRS80 en este caso por el sistema geodésico adoptado, obtenidos de la referencia [IAG, 1979]) y φ es la latitud del punto donde se desea calcular el radio medio. Los parámetros del elipsoide son el semieje mayor y la excentricidad respectivamente: $a = 6378137m$ y $e^2 = 0,00669438002290$.

Cuadro 3.3: Datos geodésicos de los puntos donde se midió distancia (Elipsoide GRS80).

Punto	Latitud (φ)	Longitud (λ)	K	R
Monolito	40°23'17",1866N	3°49'26",3981W	0,9996602068	6374669,379m
Dehesa	40°23'5",0088N	3°47'56",7555W	0,9996566286	6374666,885m
Centro	40°23'19",5067N	3°48'24",3756W	0,9996577143	6374669,854m
Motorista	40°22'38",5980N	3°48'24",5406W	0,9996577404	6374661,476m
Escuelas	40°23'31",4697N	3°46'43",2891W	0,9996537613	6374672,304m

Cuadro 3.4: D_{UTM} a partir de los datos.

Estación	Visado	$D_r = D_g \sin V$	K_m	R_m
Monolito	Centro	1464,737m	0,9996589606	6374669,616m
Motorista	Dehesa	1045,639m	0,9996571845	6374664,181m
Centro	Monolito	1464,753m	0,9996589606	6374669,616m
Dehesa	Motorista	1045,634m	0,9996571845	6374664,181m
Monolito	Escuelas	3872,410m	0,9996569841	6374670,841m

$$K_e = \frac{R_m}{R_m + H_m} \quad D_{UTM} = K_m K_e D_r$$

Monolito	Centro	0,9998949076	1464,083m
Motorista	Dehesa	0,9998949075	1045,170m
Centro	Monolito	0,9998949076	1464,099m
Dehesa	Motorista	0,9998949075	1045,166m
Monolito	Escuelas	0,9998949076	3870,675m

Reducción de ángulos

Debido a las cortas distancias entre los puntos de la red, la reducción de los ángulos para pasarlos del plano horizontal al elipsoide y posteriormente al plano de la proyección no tiene sentido. Con absoluta seguridad, la corrección a los ángulos sería muy inferior al error teórico en su medida (en el apartado 3.1.1 se dedujo que era alrededor de 11^{cc}).

Para constatar este hecho se procede a la reducción del ángulo de la red cuyos lados son los más largos. Se trata del ángulo formado entre los vértices *Punto A: Escuelas* (punto de estación) y *Punto B: Monolito*, *Punto C: Poncio* (puntos visados). A continuación se comparará el ángulo formado entre estos vértices calculado a partir de orientaciones con el calculado a partir de acimutes geodésicos:

■ Orientaciones:

Se obtienen a partir de las coordenadas iniciales de los vértices en el sistema ETRS89:

$$\begin{cases} O_A^B = \arctan \frac{\Delta X_A^B}{\Delta Y_A^B} = 293,3178^g \\ O_A^C = \arctan \frac{\Delta X_A^C}{\Delta Y_A^C} = 309,3008^g \end{cases}$$

Consecuentemente el ángulo formado será:

$$A = O_A^C - O_A^B = 309,3008^g - 293,3178^g = 15,9830^g$$

■ **Acimutes:**

Se determinan, una vez más, a partir de las fórmulas establecidas en la referencia oficial [DMA, 1989]:

$$\begin{cases} A_A^B = 292,7572^g \\ A_A^C = 308,7401^g \end{cases}$$

Esta vez, el ángulo formado será:

$$A = A_A^C - A_A^B = 308,7401^g - 292,7572^g = 15,9830^g$$

De esta manera queda demostrado que la diferencia entre ambos ángulos está por debajo incluso de la apreciación del aparato topográfico empleado (1^{cc}). Con lo cual, se corrobora la premisa de no realizar reducciones de los ángulos al plano de la proyección puesto que la diferencia quedaría absorbida por la imprecisión de la instrumentación empleada.

3.2.4. Planteamiento estocástico: Pesos

La matriz de pesos (según se demuestra en el apartado A.3.3 del apéndice A) es una matriz diagonal cuyos elementos se materializan dividiendo la varianza de peso unidad por los errores medios cuadráticos al cuadrado de cada observación. La varianza de peso unidad se supondrá igual a 1 por desconocerla a priori. Al final del cálculo se comprobará si esta suposición es correcta comparandola con el valor del error de una observación aislada.

Para estimar los errores se toman los siguientes criterios:

■ Errores de las ecuaciones de ángulo:

A pesar de que se ha expuesto que lo más lógico sería estimarlo del orden de 11^{cc} , empíricamente se observa, una vez ajustada la red, que

un valor más realista sería de $7,5^{cc}$ debido a que con este valor, $\hat{\sigma}_0^2$ se aproxima mucho más a 1 y $\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}$ resulta ser menor. Consecuentemente se opta por este segundo valor, por otro lado, también coherente dado las buenas condiciones de visibilidad en que se hicieron las observaciones y lo bien definidas y próximas que están unas señales respecto a otras.

- Errores de las ecuaciones de distancia:

Aplicando la fórmula (3.1), los errores para cada una de las distancias medidas resultan:

Cuadro 3.5: emc_d en las distancias.

Estación	Visado	emc_d
Monolito	Centro	$0,006m$
Motorista	Dehesa	$0,006m$
Centro	Monolito	$0,006m$
Dehesa	Motorista	$0,006m$
Monolito	Escuelas	$0,009m$

- La matriz de pesos resultante tiene dimensiones $m \times m$ donde $m = 23$. Su expresión matemática queda representada en la fórmula (3.4).

3.2.5. Planteamiento de ecuaciones de observación

Con las observaciones de que se dispone se pueden plantear 18 ecuaciones de ángulo y 5 de distancia ($m = 23$). Una vez reducidas las distancias al plano de la proyección, las observaciones reducidas y el correspondiente vector de observaciones son los reflejados en el cuadro 3.6.

Cuadro 3.6: Vector de observaciones l .

nº	Estación (A)	Visado(B)	Visado (C)	Tipo de ecuación	Ángulo/ D_{UTM}
1	Centro	Dehesa	Motorista	Ángulo	61,8975 ^g
2	Centro	Motorista	Monolito	Ángulo	96,6987 ^g
3	Centro	Monolito	Camino	Ángulo	46,4097 ^g
4	Centro	Camino	Poncio	Ángulo	38,7826 ^g
5	Monolito	Camino	Poncio	Ángulo	35,5073 ^g
6	Monolito	Camino	Poncio	Ángulo	35,5065 ^g
7	Monolito	Poncio	Escuelas	Ángulo	28,8594 ^g
8	Monolito	Escuelas	Centro	Ángulo	4,1586 ^g
9	Monolito	Escuelas	Centro	Ángulo	4,1589 ^g
10	Camino	Centro	Monolito	Ángulo	85,0652 ^g
11	Escuelas	Monolito	Poncio	Ángulo	15,9834 ^g
12	Dehesa	Motorista	Monolito	Ángulo	68,0669 ^g
13	Dehesa	Monolito	Centro	Ángulo	27,1004 ^g
14	Dehesa	Centro	Camino	Ángulo	3,1369 ^g
15	Dehesa	Camino	Poncio	Ángulo	18,2649 ^g
16	Motorista	Centro	Dehesa	Ángulo	42,9348 ^g
17	Motorista	Dehesa	Camino	Ángulo	327,8679 ^g
18	Motorista	Camino	Poncio	Ángulo	22,4235 ^g
19	Monolito	Centro		Distancia	1464,083m
20	Motorista	Dehesa		Distancia	1045,170m
21	Centro	Monolito		Distancia	1464,099m
22	Dehesa	Motorista		Distancia	1045,166m
23	Monolito	Escuelas		Distancia	3870,675m

La matriz de diseño, la de criterio y el vector de términos independientes son los expresados como A , N y t respectivamente. La dimensión de A es $m \times n$ la de N , $n \times n$ y la de t , $m \times 1$. Fórmulas (3.5).

Apartado 4

Resultados

4.1. Resolución por 4 diferentes métodos

4.1.1. Resolución empleando matriz de constreñimientos

Matriz de costreñimientos

Debido a que el único condicionante geométrico de la red es la medición de ciertas distancias, habría otros 3 parámetros que definen geométricamente la red que quedarían por conocer. Se trata de al menos una dirección conocida y las coordenadas de un punto. Por carecer de estos datos, a pesar de que hay superabundancia de observaciones, el problema geométrico es irresoluble por tener la matriz A y, consecuentemente N un defecto de rango igual a tres. Por lo tanto, para poder obtener la mejor estimación insesgada de la solución, la matriz de constreñimientos E tiene que tener rango igual a 3 y la forma deducida en el punto 2 del apartado 2.6.2 ($E_{\text{geométrico}}$) o la fórmula general para E (2.45) deducida en apartado 2.6.4 ($E_{\text{algebraico}}$). Con todo esto la matriz E y la matriz pseudoinversa calculada por este método: $N^+ = (A^T P A + E^T E)^{-1} - E^T (E E^T)^{-1} (E E^T)^{-1} E$ tienen la expresión de la fórmula (4.1). Con cualquiera de las dos formas de calcular la matriz E : $E_{\text{geométrico}}$ y $E_{\text{algebraico}}$.

Parámetros ajustados

El resultado del ajuste MMCC sobre el vector de los parámetros incógnita es el siguiente:

$$\hat{x}_1 = N^+d = \begin{pmatrix} x_{\text{Centro}} \\ y_{\text{Centro}} \\ x_{\text{Monolito}} \\ y_{\text{Monolito}} \\ x_{\text{Camino}} \\ y_{\text{Camino}} \\ x_{\text{Escuelas}} \\ y_{\text{Escuelas}} \\ x_{\text{Dehesa}} \\ y_{\text{Dehesa}} \\ x_{\text{Motorista}} \\ y_{\text{Motorista}} \\ x_{\text{Poncio}} \\ y_{\text{Poncio}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,018m \\ -0,006m \\ 0,012m \\ 0,018m \\ 0,015m \\ 0,019m \\ -0,056m \\ 0,035m \\ 0,037m \\ -0,097m \\ -0,004m \\ -0,023m \\ -0,021m \\ 0,055m \end{pmatrix}$$

y los parámetros ajustados son por lo tanto:

$$\hat{X}_1 = \hat{x}_1 + X_0 = \begin{pmatrix} 0,018m \\ -0,006m \\ 0,012m \\ 0,018m \\ 0,015m \\ 0,019m \\ -0,056m \\ 0,035m \\ 0,037m \\ -0,097m \\ -0,004m \\ -0,023m \\ -0,021m \\ 0,055m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 431526,019m \\ 4471218,713m \\ 430063,084m \\ 4471160,663m \\ 430503,532m \\ 4472061,484m \\ 433912,522m \\ 4471566,203m \\ 432173,163m \\ 4470765,785m \\ 431510,622m \\ 4469957,404m \\ 431322,648m \\ 4471947,291m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 431526,037m \\ 4471218,707m \\ 430063,096m \\ 4471160,681m \\ 430503,547m \\ 4472061,503m \\ 433912,466m \\ 4471566,238m \\ 432173,200m \\ 4470765,688m \\ 431510,618m \\ 4469957,381m \\ 431322,627m \\ 4471947,346m \end{pmatrix}$$

4.1.2. Resolución por descomposición LU de la matriz de criterio N

Determinación de las matrices B y C

A partir de la herramienta de descomposición LU del complemento “Matrix” de “Excel” de la dirección web [<http://digilander.libero.it/foxes>], se obtienen las correspondientes matrices L y U de la fórmula (4.2).

Eliminando las filas de pivotes nulos de la matriz U y las correspondientes columnas de la matriz L resultan las matrices B y C . Posteriormente, se halla la matriz N^+ mediante la fórmula (2.28):

$$N^+ = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B$$

La expresión de las matrices B , C y N^+ queda reflejada en la fórmula (4.3).

Las diferencias que pudiera haber entre la matriz pseudoinversa calculada mediante éste y el anterior procedimiento, son solamente fruto de las aproximaciones numéricas del método de cálculo empleado. Puesto que ha quedado demostrado teóricamente que la matriz pseudoinversa es única.

Parámetros ajustados

Debido a la unicidad de la matriz pseudoinversa el resultado del ajuste MMCC sobre el vector de los parámetros incógnita es el mismo que en el caso del cálculo mediante matriz de constreñimientos:

$$\hat{x}_2 = N^+ d = \begin{pmatrix} x_{\text{Centro}} \\ y_{\text{Centro}} \\ x_{\text{Monolito}} \\ y_{\text{Monolito}} \\ x_{\text{Camino}} \\ y_{\text{Camino}} \\ x_{\text{Escuelas}} \\ y_{\text{Escuelas}} \\ x_{\text{Dehesa}} \\ y_{\text{Dehesa}} \\ x_{\text{Motorista}} \\ y_{\text{Motorista}} \\ x_{\text{Poncio}} \\ y_{\text{Poncio}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,018m \\ -0,006m \\ 0,012m \\ 0,018m \\ 0,015m \\ 0,019m \\ -0,056m \\ 0,035m \\ 0,037m \\ -0,097m \\ -0,004m \\ -0,023m \\ -0,021m \\ 0,055m \end{pmatrix}$$

y los parámetros ajustados son por lo tanto:

$$\hat{X}_2 = \hat{x}_2 + X_0 = \begin{pmatrix} 0,018m \\ -0,006m \\ 0,012m \\ 0,018m \\ 0,015m \\ 0,019m \\ -0,056m \\ 0,035m \\ 0,037m \\ -0,097m \\ -0,004m \\ -0,023m \\ -0,021m \\ 0,055m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 431526,019m \\ 4471218,713m \\ 430063,084m \\ 4471160,663m \\ 430503,532m \\ 4472061,484m \\ 433912,522m \\ 4471566,203m \\ 432173,163m \\ 4470765,785m \\ 431510,622m \\ 4469957,404m \\ 431322,648m \\ 4471947,291m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 431526,037m \\ 4471218,707m \\ 430063,096m \\ 4471160,681m \\ 430503,547m \\ 4472061,503m \\ 433912,466m \\ 4471566,238m \\ 432173,200m \\ 4470765,688m \\ 431510,618m \\ 4469957,381m \\ 431322,627m \\ 4471947,346m \end{pmatrix}$$

4.1.3. Resolución por descomposición de Cholesky de la matriz de criterio N

Determinación de la matriz L

Como en el caso anterior, se emplea la herramienta de descomposición de Cholesky del complemento “Matrix” de “Excel” de la dirección web de la referencia [<http://digilander.libero.it/foxes>], obteniéndose la matriz L .

Eliminando las columnas nulas (tantas como el defecto de rango de la matriz N) de la matriz L resulta la matriz L' . Posteriormente, se halla la matriz N^+ mediante la fórmula (2.32):

$$N^+ = L'(L'^T L')^{-1}(L'^T L')^{-1}L'^T$$

La expresión de las matrices L , L' y N^+ está expuesta en la fórmula (4.4).

Las diferencias que pudiera haber entre la matriz pseudoinversa calculada mediante este procedimiento y los anteriores son, como se dijo anteriormente, fruto de las aproximaciones numéricas del método de cálculo empleado.

Parámetros ajustados

Debido a la unicidad de la matriz pseudoinversa el resultado del ajuste MMCC sobre el vector de los parámetros incógnita es el mismo que en los casos anteriores:

$$\hat{x}_3 = N^+ d = \begin{pmatrix} x_{\text{Centro}} \\ y_{\text{Centro}} \\ x_{\text{Monolito}} \\ y_{\text{Monolito}} \\ x_{\text{Camino}} \\ y_{\text{Camino}} \\ x_{\text{Escuelas}} \\ y_{\text{Escuelas}} \\ x_{\text{Dehesa}} \\ y_{\text{Dehesa}} \\ x_{\text{Motorista}} \\ y_{\text{Motorista}} \\ x_{\text{Poncio}} \\ y_{\text{Poncio}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,018m \\ -0,006m \\ 0,012m \\ 0,018m \\ 0,015m \\ 0,019m \\ -0,056m \\ 0,035m \\ 0,037m \\ -0,097m \\ -0,004m \\ -0,023m \\ -0,021m \\ 0,055m \end{pmatrix}$$

y los parámetros ajustados son:

$$\hat{X}_3 = \hat{x}_3 + X_0 = \begin{pmatrix} 0,018m \\ -0,006m \\ 0,012m \\ 0,018m \\ 0,015m \\ 0,019m \\ -0,056m \\ 0,035m \\ 0,037m \\ -0,097m \\ -0,004m \\ -0,023m \\ -0,021m \\ 0,055m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 431526,019m \\ 4471218,713m \\ 430063,084m \\ 4471160,663m \\ 430503,532m \\ 4472061,484m \\ 433912,522m \\ 4471566,203m \\ 432173,163m \\ 4470765,785m \\ 431510,622m \\ 4469957,404m \\ 431322,648m \\ 4471947,291m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 431526,037m \\ 4471218,707m \\ 430063,096m \\ 4471160,681m \\ 430503,547m \\ 4472061,503m \\ 433912,466m \\ 4471566,238m \\ 432173,200m \\ 4470765,688m \\ 431510,618m \\ 4469957,381m \\ 431322,627m \\ 4471947,346m \end{pmatrix}$$

4.1.4. Resolución por descomposición en valores singulares (DVS) de la matriz de criterio N

Determinación de las matrices U y D

A partir de la herramienta de descomposición SVD del complemento “Matrix” de “Excel” de la dirección web [<http://digilander.libero.it/foxes>], se obtienen las correspondientes matrices U y D .

Aplicando la fórmula (2.34) se obtiene la matriz D^- . Posteriormente, se halla la matriz N^+ mediante (2.35):

$$N^+ = UD^-U^T$$

La expresión de las matrices U , D , D^- y N^+ está expuesta en las fórmulas (4.5) y (4.6).

Las diferencias que pudiera haber entre la matriz pseudoinversa calculada mediante este procedimiento y los anteriores son, una vez más, fruto de las aproximaciones numéricas del método de cálculo empleado.

Parámetros ajustados

Debido a la unicidad de la matriz pseudoinversa el resultado del ajuste MMCC sobre el vector de los parámetros incógnita es el mismo que en los casos anteriores:

$$\hat{x}_4 = N^+ d = \begin{pmatrix} x_{\text{Centro}} \\ y_{\text{Centro}} \\ x_{\text{Monolito}} \\ y_{\text{Monolito}} \\ x_{\text{Camino}} \\ y_{\text{Camino}} \\ x_{\text{Escuelas}} \\ y_{\text{Escuelas}} \\ x_{\text{Dehesa}} \\ y_{\text{Dehesa}} \\ x_{\text{Motorista}} \\ y_{\text{Motorista}} \\ x_{\text{Poncio}} \\ y_{\text{Poncio}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,018m \\ -0,006m \\ 0,012m \\ 0,018m \\ 0,015m \\ 0,019m \\ -0,056m \\ 0,035m \\ 0,037m \\ -0,097m \\ -0,004m \\ -0,023m \\ -0,021m \\ 0,055m \end{pmatrix}$$

y los parámetros ajustados son:

$$\hat{X}_4 = \hat{x}_4 + X_0 = \begin{pmatrix} 0,018m \\ -0,006m \\ 0,012m \\ 0,018m \\ 0,015m \\ 0,019m \\ -0,056m \\ 0,035m \\ 0,037m \\ -0,097m \\ -0,004m \\ -0,023m \\ -0,021m \\ 0,055m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 431526,019m \\ 4471218,713m \\ 430063,084m \\ 4471160,663m \\ 430503,532m \\ 4472061,484m \\ 433912,522m \\ 4471566,203m \\ 432173,163m \\ 4470765,785m \\ 431510,622m \\ 4469957,404m \\ 431322,648m \\ 4471947,291m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 431526,037m \\ 4471218,707m \\ 430063,096m \\ 4471160,681m \\ 430503,547m \\ 4472061,503m \\ 433912,466m \\ 4471566,238m \\ 432173,200m \\ 4470765,688m \\ 431510,618m \\ 4469957,381m \\ 431322,627m \\ 4471947,346m \end{pmatrix}$$

4.2. Análisis estocástico inicial a posteriori

El vector de residuos v resulta ser el siguiente:

$$v^T = \begin{pmatrix} 0,0004^g & -0,0007^g & 0,0000^g & 0,0005^g & -0,0003^g & 0,0005^g \\ -0,0001^g & 0,0002^g & -0,0001^g & 0,0000^g & 0,0006^g & 0,0004^g \\ -0,0007^g & -0,0006^g & -0,0003^g & 0,0004^g & 0,0002^g & -0,0013^g \\ 0,009m & -0,003m & -0,008m & 0,001m & 0,000m & \end{pmatrix}$$

Aplicando la fórmula (2.48):

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{v^T P v}{m - R(A)}} = \sqrt{\frac{11,76107901}{23 - 11}} = 0,9899949078$$

Este valor es un indicador más de que el ajuste parece ser correcto, y de que el planteamiento estocástico también lo es: el error en una medición aislada a posteriori, es muy próximo al planteado inicialmente que es 1.

Además, los grados de libertad; 12, indican que la observación constituye una muestra bastante aceptable de observaciones para el análisis realizado.

4.3. Error de los parámetros ajustados a posteriori

Se muestra la matriz de varianzas-covarianzas de parámetros ajustados, procedente del cálculo según:

$$\Sigma_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1}$$

$$\Sigma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \begin{pmatrix} 2,05025E-05 & -1,05929E-05 & 1,22023E-05 & 2,5614E-06 & -9,20654E-06 & -3,45267E-06 & 1,2964E-06 \\ -1,05929E-05 & 3,84256E-05 & -6,46724E-06 & -6,71632E-06 & -5,71632E-06 & -1,01768E-05 & -4,34852E-06 \\ 1,22023E-05 & -6,46724E-06 & 2,43036E-05 & 3,32335E-06 & -4,70565E-06 & -1,2824E-05 & -4,34852E-06 \\ 2,5614E-06 & -3,98033E-06 & 3,32335E-06 & 3,9481E-05 & -1,40534E-06 & -7,11192E-06 & 1,87158E-06 \\ -9,20654E-06 & -5,71632E-06 & -4,70565E-06 & -1,40534E-06 & 6,90443E-05 & 2,85017E-06 & -2,30671E-05 \\ -3,45267E-06 & -1,01768E-05 & -1,2824E-05 & -7,11192E-06 & -2,85017E-06 & 5,64849E-05 & -1,85156E-05 \\ 1,2964E-06 & -4,34852E-06 & 1,31301E-05 & 1,87158E-06 & -2,30671E-05 & -1,85156E-05 & 7,90303E-05 \\ 3,27125E-06 & -3,80537E-05 & 5,02532E-06 & 2,76097E-05 & 5,60093E-05 & 3,37637E-05 & -4,94799E-07 \\ -6,7462E-06 & 1,28872E-05 & -1,4076E-05 & 9,07137E-06 & -2,29636E-05 & 1,45571E-05 & -2,10482E-05 \\ -4,13644E-06 & 2,82198E-05 & -7,05245E-08 & -3,08504E-05 & -1,5774E-05 & -4,70743E-05 & 1,45571E-05 \\ -1,03251E-05 & 2,48538E-05 & -1,79666E-05 & -6,12919E-06 & -3,79673E-05 & -7,84199E-07 & 1,26574E-06 \\ 1,7617E-07 & 1,33837E-05 & 4,65533E-06 & -2,35646E-05 & -7,84199E-07 & -4,12829E-05 & 1,61192E-05 \\ -7,72336E-06 & -1,0616E-05 & -1,28877E-05 & -9,29317E-06 & 2,88659E-05 & 1,61192E-05 & -3,03719E-05 \\ 1,21732E-05 & -2,78183E-05 & 6,35777E-06 & -1,58337E-06 & -3,51795E-05 & 1,53974E-05 & 6,23363E-06 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3,27125E-06 & -6,7462E-06 & -4,13644E-06 & -1,03251E-05 & 1,7617E-07 & -7,72336E-06 & 1,21732E-05 \\ -3,80537E-05 & 1,28872E-05 & 2,82198E-05 & -1,03251E-05 & 1,33837E-05 & -1,0616E-05 & -2,78183E-05 \\ 5,02532E-06 & -1,4076E-05 & -7,05245E-08 & -3,08504E-05 & 4,65533E-06 & -1,28877E-05 & 6,35777E-06 \\ 2,76097E-05 & 9,07137E-06 & -3,08504E-05 & -6,12919E-06 & -2,35646E-05 & -7,84199E-07 & -1,58337E-06 \\ 5,60093E-05 & -2,29636E-05 & -1,5774E-05 & -3,79673E-05 & -7,84199E-07 & 2,88659E-05 & -3,51795E-05 \\ 3,37637E-05 & 1,45571E-05 & -4,70743E-05 & 1,26574E-06 & -4,12829E-05 & 1,61192E-05 & 1,53974E-05 \\ -4,94799E-07 & -2,10482E-05 & 7,66856E-06 & -1,89696E-05 & 7,58513E-06 & -3,03719E-05 & 6,23363E-06 \\ 0,000147594 & -2,2834E-05 & -0,000113854 & -8,82005E-05 & -6,65437E-05 & 4,72235E-05 & 9,48836E-06 \\ -2,2834E-05 & 5,06545E-05 & -1,86971E-05 & 3,01978E-05 & -1,481E-05 & -1,60184E-05 & 1,98254E-05 \\ -0,000113854 & -1,86971E-05 & 0,000136556 & 5,0093E-05 & 8,68395E-05 & -1,90834E-05 & -5,98374E-05 \\ -8,82005E-05 & 3,01978E-05 & 5,0093E-05 & 8,0614E-05 & 1,35288E-05 & -2,55833E-05 & 4,58839E-06 \\ -6,65437E-05 & -1,481E-05 & 8,68395E-05 & 1,35288E-05 & 8,54888E-05 & -1,03512E-05 & -5,43208E-05 \\ 4,72235E-05 & -1,60184E-05 & -1,90834E-05 & 1,35288E-05 & 8,54888E-05 & -1,03512E-05 & -1,39988E-05 \\ 9,48836E-06 & 1,98254E-05 & -5,98374E-05 & 4,58839E-06 & -5,43208E-05 & -1,39988E-05 & 0,000118679 \end{pmatrix}$$

4.4. Elipses absolutas de error

De la matriz de varianzas-covarianzas de los parámetros ajustados, se obtienen las submatrices correspondientes a las coordenadas de los respectivos vértices. A continuación se exponen los resultados.

La representación gráfica de las elipses absolutas de error se muestra en la figura 4.1.

Centro		
Autovalores	0,000043345	0,000015590
	a	b
Semiejes	0,007m	0,004m
	v_a	v_b
Autovectores	0,420776189	0,907164483
	-0,907164483	0,420776189
	O_a	O_b
Orientación	172,3516 ^g	72,3516 ^g
Monolito		
Autovalores	0,000040180	0,000023610
	a	b
Semiejes	0,006m	0,005m
	v_a	v_b
Autovectores	0,204944370	0,978773623
	0,978773623	-0,204944370
	O_a	O_b
Orientación	13,1403 ^g	113,1403 ^g
Camino		
Autovalores	0,000069663	0,000055873
	a	b
Semiejes	0,008m	0,007m
	v_a	v_b
Autovectores	0,977403136	0,211383798
	0,211383798	-0,977403136
	O_a	O_b
Orientación	86,4406 ^g	186,4406 ^g

Escuelas		
Autovalores	0,000147618	0,000079031
	a	b
Semiejes	0,012 <i>m</i>	0,009 <i>m</i>
	v_a	v_b
Autovectores	0,007215247	0,999973970
	-0,999973970	0,007215247
	O_a	O_b
Orientación	199,5407 ^g	99,5407 ^g
Dehesa		
Autovalores	0,000140471	0,000046764
	a	b
Semiejes	0,012 <i>m</i>	0,007 <i>m</i>
	v_a	v_b
Autovectores	0,203799817	0,979012581
	-0,979012581	0,203799817
	O_a	O_b
Orientación	186,9342 ^g	86,9342 ^g
Motorista		
Autovalores	0,000096806	0,000069312
	a	b
Semiejes	0,010 <i>m</i>	0,008 <i>m</i>
	v_a	v_b
Autovectores	0,641159767	0,767407423
	0,767407423	-0,641159767
	O_a	O_b
Orientación	44,3093 ^g	144,3093 ^g
Poncio		
Autovalores	0,000122049	0,000060369
	a	b
Semiejes	0,011 <i>m</i>	0,008 <i>m</i>
	v_a	v_b
Autovectores	0,233379015	0,972385847
	-0,972385847	0,233379015
	O_a	O_b
Orientación	185,0043 ^g	85,0043 ^g

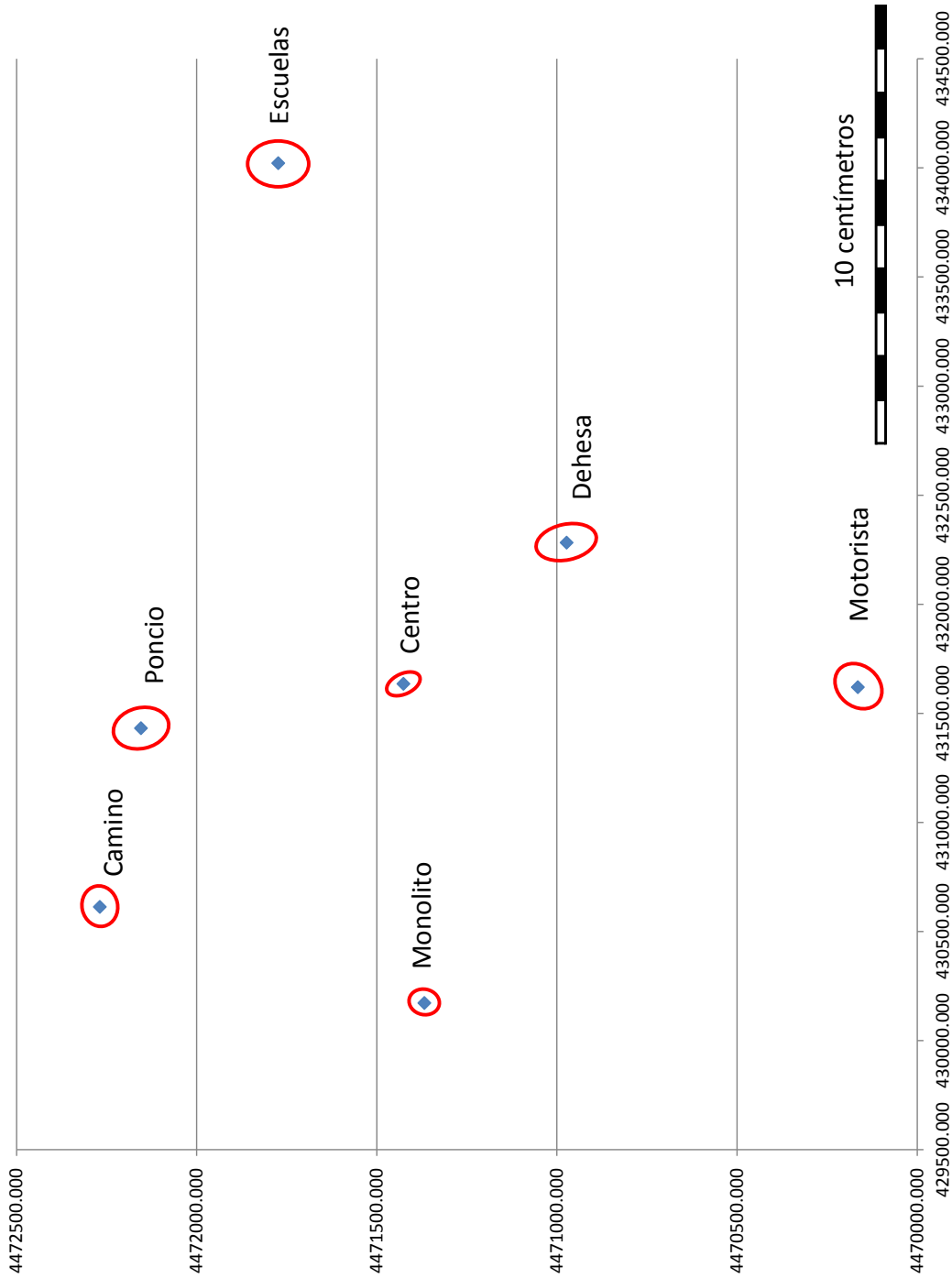


Figura 4.1: Croquis de las elipses absolutas de error.

Como puede observarse en el croquis, el error es mínimo en el centro de la red y mayor (aunque muy pequeño) en los extremos. Esta es una consecuencia lógica y evidente. En el centro, al haber mayor número de observaciones y por materializarse éstas en todas direcciones, está mejor controlado. Sin embargo, los extremos son geoméricamente más “inestables” al recibir observaciones de una sola zona de la red en lugar de recibirlas por todas las direcciones.

Asimismo, no se observa ningún tipo de desviación sistemática de los errores en una determinada dirección. Lo cual pone de manifiesto, una vez más, la coherencia entre las observaciones y las coordenadas de los vértices de la red.

4.5. Comparación con las coordenadas originales

La diferencia de las coordenadas ajustadas con las originales es precisamente \hat{x} :

$$\hat{x} = N^+d = \hat{X} - X_0 = \begin{pmatrix} x_{\text{Centro}} \\ y_{\text{Centro}} \\ x_{\text{Monolito}} \\ y_{\text{Monolito}} \\ x_{\text{Camino}} \\ y_{\text{Camino}} \\ x_{\text{Escuelas}} \\ y_{\text{Escuelas}} \\ x_{\text{Dehesa}} \\ y_{\text{Dehesa}} \\ x_{\text{Motorista}} \\ y_{\text{Motorista}} \\ x_{\text{Poncio}} \\ y_{\text{Poncio}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,018m \\ -0,006m \\ 0,012m \\ 0,018m \\ 0,015m \\ 0,019m \\ -0,056m \\ 0,035m \\ 0,037m \\ -0,097m \\ -0,004m \\ -0,023m \\ -0,021m \\ 0,055m \end{pmatrix}$$

Como puede observarse la mayoría de los valores están por debajo de los $5cm$, lo cual indica una precisión muy elevada teniendo en cuenta los errores accidentales inherentes a la instrumentación y los errores también accidentales aunque no estimables debidos al estacionamiento. Estos últimos, como ya se comentó, están principalmente causados por la carencia de sistema de centrado forzado. Solamente hay una coordenada (la y del vértice *Dehesa*) cuya discrepancia roza los $10cm$. Este valor, aunque muy

por encima de los otros, sigue siendo coherente con la precisión de los métodos empleados.

4.6. Transformación entre sistemas de coordenadas

Como ya se demostró en el apartado 2.6, la resolución de una red mediante el procedimiento de red libre, define indirectamente un sistema de coordenadas óptimo a partir de las coordenadas ajustadas de los puntos que constituirían el marco de dicho sistema de referencia. En teoría, si la precisión de la instrumentación es superior a la empleada para la determinación de los puntos originalmente y si no hay errores groseros, el sistema de coordenadas calculado se ajusta más a la realidad que el inicial. No se sabe si éste es el caso de la red del presente estudio puesto que se desconoce la precisión con que se calcularon las coordenadas originales, pero, no obstante, se puede calcular la relación entre ambos sistemas de referencia mediante la fórmula (2.36). Se trata de la denominada transformación de 7 parámetros, válida para transformaciones diferenciales entre sistemas de coordenadas, por lo tanto, más que suficiente para el presente estudio.

Previamente, las coordenadas de ambos sistemas (referidas al elipsoide GRS80¹) habría que transformarlas a un sistema de referencia tridimensional mediante 2 pasos:

1. Paso de coordenadas UTM a coordenadas geodésicas.

Una vez más mediante el empleo de las fórmulas proporcionadas por la referencia [DMA, 1989] se obtienen las coordenadas geodésicas del siguiente cuadro:

¹Recuérdese $a = 6378137m$, $e^2 = 0,00669438002290$.

Coordenadas Originales

Nombre del punto	Latitud φ	Longitud λ
Centro	40°23'19",5067N	3°48'24",3756W
Monolito	40°23'17",1866N	3°49'26",3981W
Camino	40°23'46",5327N	3°49'8",0721W
Escuelas	40°23'31",4697N	3°46'43",2891W
Dehesa	40°23'5",0088N	3°47'56",7555W
Motorista	40°22'38",5980N	3°48'24",5406W
Poncio	40°23'43",0741N	3°48'33",2838W

Coordenadas Ajustadas

	Latitud φ	Longitud λ
Centro	40°23'19",5065N	3°48'24",3748W
Monolito	40°23'17",1872N	3°49'26",3976W
Camino	40°23'46",5333N	3°49'8",0715W
Escuelas	40°23'31",4708N	3°46'43",2915W
Dehesa	40°23'5",0057N	3°47'56",7539W
Motorista	40°22'38",5973N	3°48'24",5407W
Poncio	40°23'43",0759N	3°48'33",2847W

2. Paso de coordenadas geodésicas a coordenadas tridimensionales.

Mediante las fórmulas de la página 90 de la referencia [Mena, 2000], para transformar coordenadas geodésicas a tridimensionales de puntos que se encuentran sobre el elipsoide de referencia:

$$X = N \cos \varphi \cos \lambda; \quad Y = N \cos \varphi \sin \lambda; \quad Z = (1 - e^2)N \sin \varphi$$

y la fórmula proporcionada para calcular N (página 95):

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

Finalmente se obtienen las coordenadas tridimensionales reflejadas el siguiente cuadro:

Coordenadas Originales

Nombre del punto	X	Y	Z
Centro	4854115,162m	-322986,150m	4110958,547m
Monolito	4854064,089m	-324448,830m	4110904,040m
Camino	4853507,626m	-323978,491m	4111593,451m
Escuelas	4854034,279m	-320591,443m	4111239,594m
Dehesa	4854447,483m	-322355,349m	4110617,930m
Motorista	4854930,632m	-323044,310m	4109997,374m
Poncio	4853631,183m	-323164,494m	4111512,203m

Coordenadas Ajustadas

	X	Y	Z
Centro	4854115,167m	-322986,132m	4110958,542m
Monolito	4854064,078m	-324448,817m	4110904,054m
Camino	4853507,615m	-323978,475m	4111593,465m
Escuelas	4854034,253m	-320591,498m	4111239,621m
Dehesa	4854447,548m	-322355,315m	4110617,856m
Motorista	4854930,646m	-323044,314m	4109997,357m
Poncio	4853631,146m	-323164,513m	4111512,245m

Una vez que se dispone de ambos conjuntos de coordenadas en un sistema de referencia tridimensional, es posible aplicar la fórmula de transformación de 7 parámetros (2.36) particularizándola para los 7 puntos que constituyen la red:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_{01} & Y_{01} & X_{01} \\ 0 & 1 & 0 & Z_{01} & 0 & -X_{01} & Y_{01} \\ 0 & 0 & 1 & -Y_{01} & X_{01} & 0 & Z_{01} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_{02} & Y_{02} & X_{02} \\ 0 & 1 & 0 & Z_{02} & 0 & -X_{02} & Y_{02} \\ 0 & 0 & 1 & -Y_{02} & X_{02} & 0 & Z_{02} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_{07} & Y_{07} & X_{07} \\ 0 & 1 & 0 & Z_{07} & 0 & -X_{07} & Y_{07} \\ 0 & 0 & 1 & -Y_{07} & X_{07} & 0 & Z_{07} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{01}^* - X_{01} \\ Y_{01}^* - Y_{01} \\ Z_{01}^* - Z_{01} \\ X_{02}^* - X_{02} \\ Y_{02}^* - Y_{02} \\ Z_{02}^* - Z_{02} \\ \dots \\ X_{07}^* - X_{07} \\ Y_{07}^* - Y_{07} \\ Z_{07}^* - Z_{07} \end{pmatrix}$$

Donde $(X_{01}, Y_{01}, Z_{01}, \dots, X_{07}, Y_{07}, Z_{07})$ son los valores originales de las coordenadas de los vértices en el sistema de referencia ETRS89. Por otro lado $(X_{01}^*, Y_{01}^*, Z_{01}^*, \dots, X_{07}^*, Y_{07}^*, Z_{07}^*)$ son las coordenadas aproximadas de los vértices en el nuevo sistema de referencia. Aplicando dicha fórmula a la red, se obtienen las matrices $A_{7\text{parametros}}$ y $t_{7\text{parametros}}$ (4.7).

$$A_{7\text{parametros}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4110958,547m & -322986,150m & 4854115,162m \\ 0 & 1 & 0 & 4110958,547m & 0 & -4854115,162m & -322986,150m \\ 0 & 0 & 1 & 322986,150m & 4854115,162m & 0 & 4110958,547m \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4110904,040m & -324448,830m & 4854064,089m \\ 0 & 1 & 0 & 4110904,040m & 0 & -4854064,089m & -324448,830m \\ 0 & 0 & 1 & 324448,830m & 4854064,089m & 0 & 4110904,040m \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4111593,451m & -323978,491m & 4853507,626m \\ 0 & 1 & 0 & 4111593,451m & 0 & -4853507,626m & -323978,491m \\ 0 & 0 & 1 & 323978,491m & 4853507,626m & 0 & 4111593,451m \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4111239,594m & -320591,443m & 4854034,279m \\ 0 & 1 & 0 & 4111239,594m & 0 & -4854034,279m & -320591,443m \\ 0 & 0 & 1 & 320591,443m & 4854034,279m & 0 & 4111239,594m \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4110617,930m & -322355,349m & 4854447,483m \\ 0 & 1 & 0 & 4110617,930m & 0 & -4854447,483m & -322355,349m \\ 0 & 0 & 1 & 322355,349m & 4854447,483m & 0 & 4110617,930m \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4109997,374m & -323044,310m & 4854930,632m \\ 0 & 1 & 0 & 4109997,374m & 0 & -4854930,632m & -323044,310m \\ 0 & 0 & 1 & 323044,310m & 4854930,632m & 0 & 4109997,374m \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4111512,203m & -323164,494m & 4853631,183m \\ 0 & 1 & 0 & 4111512,203m & 0 & -4853631,183m & -323164,494m \\ 0 & 0 & 1 & 323164,494m & 4853631,183m & 0 & 4111512,203m \end{pmatrix}$$

$$t_{7\text{parametros}} = \begin{pmatrix} 0,005m \\ 0,018m \\ -0,005m \\ -0,011m \\ 0,013m \\ 0,014m \\ -0,011m \\ 0,015m \\ 0,014m \\ -0,026m \\ -0,055m \\ 0,026m \\ 0,065m \\ 0,034m \\ -0,074m \\ 0,014m \\ -0,005m \\ -0,017m \\ -0,037m \\ -0,020m \\ 0,042m \end{pmatrix}$$

$$(A_{7\text{parametros}}^T A_{7\text{parametros}})^{-1} A_{7\text{parametros}}^T t_{7\text{parametros}} = \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,200m \\ 0,025m \\ -0,093m \\ -1,86882E - 09 \\ -9,09467E - 09 \\ 1,40240E - 09 \\ 3,35789E - 08 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Con lo cual, el posicionamiento espacial del nuevo sistema de referencia con respecto al antiguo queda determinado mediante los 7 parámetros que definen la relación entre ambos. Como puede observarse, la diferencia entre ambos sistemas es mínima:

- **Desplazamiento entre orígenes (τ_x, τ_y, τ_z):** representan el vector de traslación del sistema antiguo al nuevo.

Es del orden de unos pocos centímetros:

- $\tau_x = -0,200m$
- $\tau_y = 0,025m$
- $\tau_z = -0,093m$

- **Giros en los 3 ejes ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$):** representan los giros en los 3 ejes entre el sistema antiguo y el nuevo.

- $\omega_x = -1,86882E - 09 \text{ rad} = -0'',0004$
- $\omega_y = -9,09467E - 09 \text{ rad} = -0'',0019$
- $\omega_z = 1,40240E - 09 \text{ rad} = 0'',0003$

- **Factor de escala ($1 + \mu$):** representa el factor de escala entre ambos sistemas.

$$1 + \mu = 1,0000000336$$

De esta manera queda demostrado que el procedimiento de *Red Libre* es una forma de definir sistemas de referencia mediante una “depuración” de las coordenadas de los puntos. Esta “depuración” puede darse por válida y, por tanto, adoptarse unas nuevas coordenadas cuando se cumplan los requisitos siguientes:

- La precisión de la instrumentación ha de ser superior a la empleada para definir el sistema original.
 - Tiene que haber suficientes observaciones de todos los puntos que constituyen la red (*marco de referencia*).
 - Es necesario un análisis estadístico para descartar errores de cualquier tipo y observaciones que puedan afectar a la fiabilidad de los datos de la red.
-

Apartado 5

Conclusiones

Como se puede comprobar, las correcciones a coordenadas y las matrices pseudoinversas obtenidas coinciden en los cuatro ajustes, por lo que se pone de manifiesto la validez de la resolución del sistema $Nx - t = v$.

En caso de haber obtenido alguna discrepancia en el ajuste de las ecuaciones, con respecto al método de cálculo por constreñimientos, sería debido a que dado el número de decimales con que se está trabajando y los redondeos, la factorización da lugar a pivotes que no son totalmente nulos, y que pueden proporcionar un resultado engañoso. No obstante, esa situación no se ha presentado en este estudio.

Por otro lado, la resolución de la red como red libre independiente del *Datum* adoptado, proporciona una precisión intrínseca de la red muy aceptable. La obtención de desviaciones típicas en los vértices del orden de $0,5 - 1,2cm$, demuestra la extremadamente buena calidad de la observación y del ajuste realizado.

También cabe destacar que en las correcciones a coordenadas obtenidas, ninguna alcanza los $10cm$ e incluso existen correcciones del orden de décimas de centímetro.

Con estos resultados, no se estima necesario un análisis posterior como red ligada puesto que no se observan errores dignos de estudiar a parte en ninguno de los vértices. Por lo tanto, se considera que el ajuste definitivo ya está hecho concluyéndose que son correctas las coordenadas de todos los puntos de la red.

Si la precisión de la instrumentación y los métodos con los que se ha hecho este estudio fuese superior a aquéllos que se emplearon para definir las coordenadas de la red, se podría concluir que la estimación obtenida en el presente documento es mejor solución de las coordenadas originales de la red. Si, por el contrario, la instrumentación y métodos originales fueron de mayor precisión, la conclusión coherente consistiría en afirmar que al

nivel de precisión que proporcionan los instrumentos y métodos empleados en este trabajo, no se observan errores en las coordenadas de ningún punto de la red.

5.1. Objetivos cumplidos

5.1.1. Objetivo general

El objetivo general de este estudio que consistía en *profundizar en el procedimiento de resolución de redes geodésicas libres mediante el empleo de la denominada matriz seudoinversa* se ha cumplido puesto que se han desarrollado todos los fundamentos matemáticos necesarios para conseguirlo y se ha sido capaz de llevar a la práctica mediante la resolución de un ejemplo de *Red Libre*.

5.1.2. Objetivos específicos

A continuación se expondrá el grado en el que han sido conseguidos cada uno de los objetivos específicos:

1. *Exponer los casos en los que se presentan redes geodésicas libres.*

Como se explica en el apartado 2.1, las redes geodésicas libres se presentan siempre que se carezca de alguno de los siguientes datos de la red: origen, orientación o escala.

2. *Diferenciar los tipos de redes geodésicas libres en función de los grados de libertad del sistema.*

En el apartado 2.6 se han contemplado todos los casos posibles de redes libres que se presentan en el ámbito de la Geodesia. Tanto planimétricas como altimétricas como tridimensionales.

3. *Definir las aplicaciones de las redes geodésicas libres.*

Las aplicaciones están expuestas en el apartado 2.2. Incluso una de ellas; la de definir sistemas de referencia, ha sido llevada a la práctica mediante un ejemplo en el apartado 4.6.

4. *Resolver de un ejemplo práctico de red geodésica libre.*

A partir del apartado 3: *Material y Metodología*, se aplica todo el desarrollo teórico a la resolución de una red geodésica libre.

5. *Desarrollar y fundamentar matemáticamente 4 métodos de resolución de redes geodésicas libres.*

Estos cuatro métodos están expuestos y desarrollados en el apartado 2.5.

6. *Plantear la resolución de una red geodésica libre mediante esos 4 métodos.*

El ejemplo de red que se propone en este estudio se resuelve por cada uno de los métodos citados en el apartado 4.1.

7. *Constatar que la solución del ajuste de la red es la misma independientemente del método elegido.*

Se comprueba matemáticamente en el ejemplo propuesto, que los resultados del ajuste son los mismos independientemente del método de cálculo elegido. Los resultados de cada uno de los métodos se encuentran en los apartados 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3 y 4.1.4.

8. *Verificar si en alguno de los puntos de la red hay algún error grosero y en su caso, proponer unas coordenadas mejoradas.*

Mediante el estudio estadístico de errores de la red se comprueba que no hay errores groseros detectables con la instrumentación empleada y, por tanto, no se proponen coordenadas nuevas para ninguno de los puntos.

9. *Comprobar la exactitud de las coordenadas de la red geodésica ejemplo.*

Mediante el mismo estudio que en el caso anterior, se verifica la exactitud de las coordenadas de los puntos de la red geodésica.

Apéndices

Apéndice A

Modelo matemático de ecuaciones de observación

Para el planteamiento y posterior resolución del problema se partirá de un **modelo matemático** combinación a su vez de otros dos:

- **Modelo estocástico (o estadístico):** materializado por los errores de los datos observados.
- **Modelo funcional:** materializado por la relación entre parámetros y observaciones.

El método empleado para la resolución será el de ecuaciones de observación por ser más fácilmente programable que el de ecuaciones de condición y por ser el que se viene empleando actualmente por toda la comunidad científica. Este modelo tiene como inconveniente la necesidad de métodos potentes de cálculo sobre todo cuando los sistemas están formados por numerosas ecuaciones. Sin embargo, este impedimento cada vez está más superado gracias a los modernos y potentes procedimientos de cálculo y en particular para los ejemplos que serán objeto del presente estudio. La notación matemática y planteamiento del modelo que a continuación se desarrolla está extraída de las páginas 68 a 87 de la referencia [De la Puente, 2011].

“A este modelo se le denomina “Modelo de Gauss Markov regular” y se basa en la obtención de la *mejor estimación lineal insesgada* de todas las aproximaciones posibles.

Se trata de plantear una ecuación independiente por cada observación. De ahí que en adelante se denominarán *Ecuaciones de Observación*.

A.1. Nomenclatura del modelo de Ecuaciones de Observación

- Vector de observaciones ajustadas: L
- Vector de parámetros ajustados: X
- Relación funcional entre los parámetros anteriores:

$$L = F(X)$$

- Matriz de diseño: A
 - Vector de parámetros aproximados: X_0
 - Vector de términos independientes: t
 - Vector de observaciones reales: l
 - Vector de observaciones calculadas con parámetros aproximados: L_0
 - Vector de parámetros incógnitas: x
 - Vector de residuos de las observaciones: $v = L - l$
 - Número de observaciones: m
 - Número de incógnitas: n
 - Número de redundancias o grados de libertad: $r = m - n$
 - Matriz de pesos de las observaciones: P
 - Matriz cofactor a priori: $Q = P^{-1}$
 - Varianza a priori de la unidad de peso: σ_0^2
 - Matriz de varianza-covarianza de las observaciones: $\Sigma_{ll} = \Sigma = \sigma_0^2 Q$
 - Cantidades estimadas: Notación con el símbolo $\hat{}$
-

A.2. Modelo funcional de ecuaciones de observación

En la definición de este modelo se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} L &= F(X) \\ A &= \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]_{X=X_0} \\ t &= l - L_0 \\ x &= X - X_0 \\ L &= l + v \end{aligned}$$

El modelo de ecuaciones de observación se basa en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Por lo tanto, cuando las ecuaciones que definan el sistema no sean lineales habrá que linealizarlas. Este procedimiento consiste en realizar un desarrollo en serie de Taylor de la función $L = F(X)$ en torno a X_0 hasta el término de primer orden. Consecuentemente, el modelo queda de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} L &= F(X_0) + \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]_{X=X_0} (X - X_0) \\ L &= L_0 + Ax \\ Ax + L_0 - l &= v \end{aligned}$$

Finalmente, el modelo funcional linealizado:

$$\boxed{Ax - t = v} \tag{A.1}$$

Como consecuencia de la linealización, para la resolución de sistemas por este método, se ha de disponer de parámetros aproximados para que tras un número de iteraciones, los parámetros aproximados (X_0) converjan a los parámetros ajustados (X) dentro de un orden de precisión acorde con la precisión de las observaciones.

A.3. El modelo estocástico de ecuaciones de observación

Hasta el momento sólo se ha explicado cómo plantear un sistema de ecuaciones lineales (linealizando las ecuaciones en caso de planimetría), que es el paso previo necesario para el ajuste por MMCC.

Este apartado debe complementarse mediante el estudio previo de algunas propiedades de la traza y la esperanza matemática, que también serán necesarias en este apartado cuando se indique.

A.3.1. La hipótesis de Gauss-Markov

Hipótesis de partida necesaria para el ajuste, conocida como hipótesis de Gauss-Markov:

“Las observaciones se distribuyen cada una de ellas *independientemente*, según una distribución Normal. Cada una de éstas distribuciones tiene de media el valor observado l_i , y de varianza la propia de la instrumentación y observador: $\sigma_{l_i}^2$ ”.

La hipótesis, implica la construcción de la matriz de varianzas-covarianzas de las observaciones, constituyendo el modelo de Gauss-Markov:

$$\Sigma_{ll} = \begin{pmatrix} \sigma_{l_1}^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{l_2}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{l_m}^2 \end{pmatrix}$$

A.3.2. El espacio vectorial de observaciones

Consecuéntemente con lo anterior, establecido un vector columna l cuyas componentes son todas y cada una de nuestras m observaciones l_i , podemos definir un espacio vectorial que esté formado por vectores del mismo tipo, con el mismo n° de componentes, y por tanto m -dimensional.

A.3.3. La métrica en el espacio de observaciones

A continuación vamos a definir el módulo o norma de un vector en ese espacio, que será la base del producto interno.

Posteriormente será inmediato extender el concepto a la distancia entre dos vectores en el espacio de observaciones.

El tensor métrico P en el espacio de observaciones

Debido al carácter aleatorio del vector concreto de nuestras observaciones, la matriz P, que define la métrica en el espacio, debe ser capaz de proporcionar el valor más probable de la norma del vector, a partir del conocimiento del carácter aleatorio de las componentes del mismo.

Tenemos por un lado la matriz de varianzas-covarianzas correspondiente al vector de observaciones, que nos define ese carácter aleatorio: Σ_{ll}

Y por otro el concepto de métrica, expresado por la matriz P, que aplicado al vector de observaciones me dará la norma del mismo:

$$|l|^2 = l^T P l$$

Esta matriz P, como se ha dicho, debe proporcionar el valor del módulo ó norma, cuyo carácter aleatorio, hace que los cuadrados de las componentes, varíen según un peso inversamente proporcional a los correspondientes errores cuadráticos:

$$|l|^2 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{l_1}^2} l_1^2 + \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{l_2}^2} l_2^2 + \dots + \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{l_m}^2} l_m^2$$

Ese carácter aleatorio, queda expresado pues, en cada componente por $\frac{\sigma_0^2}{\sigma_{l_i}^2}$, de forma que si una observación tiene peso unidad, entonces $\sigma_{l_i}^2 = \sigma_0^2$, conociéndose por lo tanto σ_0^2 como *varianza a priori de una observación de peso unidad ó varianza de la unidad de peso*.

Lo cual podemos escribir de la forma:

$$|\vec{l}|^2 = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{l_1}^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{l_2}^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{l_m}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_m \end{pmatrix} = \vec{l}^T P \vec{l}$$

Por tanto, la matriz que define la métrica queda:

$$P = \sigma_0^2 \Sigma_{ll}^{-1} \Rightarrow \Sigma_{ll} = \sigma_0^2 P^{-1}$$

La matriz P, que llamaremos de pesos, es pues la matriz cofactor de la de varianzas-covarianzas de las observaciones será por tanto: $Q_{ll} = P^{-1}$

Se advierte de forma inmediata que si las observaciones son todas de la misma precisión, entonces:

$$\sigma_{l_1}^2 = \sigma_{l_2}^2 = \dots = \sigma_{l_m}^2 = \sigma_0^2 \Rightarrow P = I$$

y también que en ese caso, la norma será:

$$|\vec{l}|^2 = l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_m^2$$

A.3.4. Consecuencias de la hipótesis de Gauss-Markov

Estamos ahora en condiciones de entender lo que [Chueca et al 1996] en su página 291 nos indica respecto a que “*el ajuste se aborda de dos diferentes formas:*”

- *En sentido más reducido requiere como datos de partida la existencia de una matriz de varianzas-covarianzas o equivalentemente su matriz cofactor: La matriz de pesos. Por medio de la propagación de varianzas-covarianzas, ello es suficiente para estimar los parámetros, es decir, para obtener los parámetros ajustados, y para estimar la precisión de los mismos.*
- *Si además se pretende obtener información adicional como por ejemplo acerca del correcto comportamiento estadístico, la bondad o el control de las observaciones, la fiabilidad de la red dada su geometría y la propia observación, la detección de los errores groseros, etc., deberemos ir al estudio por medio de los correspondientes tests y otros conceptos estadísticos.”*

El propósito de la Ley propagación de las varianzas-covarianzas es, a partir de la matriz de varianzas-covarianzas de las observaciones originales, poder calcular la de otros parámetros que son función ellas, siempre que la relación funcional que los una sea lineal. Si no es lineal esa relación, el paso previo será la linealización.”

A.3.5. Matriz de varianzas-covarianzas y cofactor del vector de términos independientes

Sabiendo la relación básica $t = l - L_0$, y que L_0 es un vector constante, aplicamos la ley de propagación de varianzas-covarianzas:

$$\Sigma_{tt} = \Sigma_{ll} = \sigma_0^2 P^{-1}$$

por tanto, la matriz cofactor es

$$Q_{tt} = Q_{ll} = P^{-1}$$

A.4. La condición de mínimo en ecuaciones de observación

La condición de mínimo (el principio de los MMCC), está relacionada con la mínima distancia ($v_{\text{mínima}}$) entre el vector ajustado $L = L_0 + A\hat{x}$ (calculado con parámetros estimados \hat{x}), y el observado l ; el estimado lo es a través del modelo funcional, y el observado es el de datos de campo: $v_{\text{mínima}} = \text{distancia}(L - l)_{\text{mínima}}$

$$v = L - l = L_0 + A\hat{x} - l$$

$$\text{Principio} \rightarrow \|[L_0 + Ax]_{\text{estimado}} - l_{\text{observado}}\|_{\text{mínima}}$$

Es decir, la condición exige hacer mínimo en el espacio de observaciones la forma cuadrática:

$$\|v^T P v\|_{\text{mínimo}} = T(v)_{\text{mínimo}}$$

Aplicamos la condición:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(v)}{\partial x} &= 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^T P \hat{v} = 2A^T P \hat{v} = 0 \\ A^T P \hat{v} &= A^T P (A\hat{x} - t) = A^T P A \hat{x} - A^T P t = 0 \end{aligned}$$

A.4.1. Valores estimados: sistema de ecuaciones normales

Empleando la nomenclatura

$$\boxed{\begin{cases} N = A^T P A \\ d = A^T P t \end{cases}} \quad (\text{A.2})$$

la estimación, conocida como *sistema de ecuaciones normales*, queda de la forma:

$$\boxed{N\hat{x} - d = 0} \quad (\text{A.3})$$

Si la matriz N es regular (modelo Gauss-Markov regular), la solución del sistema de ecuaciones normales es única y los *parámetros estimados* serán pues:

$$\boxed{N\hat{x} - d = 0 \Rightarrow \hat{x} = N^{-1}d} \quad (\text{A.4})$$

Comprobemos que \hat{x} es una estimación insesgada¹:

$$E[\hat{x}] = E[N^{-1}d] = E[N^{-1}A^T P t] = N^{-1}A^T P E[t] = N^{-1}A^T P A x = I x = x$$

Nótese que, el conocimiento “a priori” de σ_0^2 *no es necesario*, sino únicamente la matriz de pesos $P = \sigma_0^2 \Sigma_u^{-1}$, pudiendo asignarse el valor arbitrario $\sigma_0^2 = 1$, con lo que $P = \Sigma_u^{-1}$, práctica común en Topografía.”

¹Una estimación \hat{x} es insesgada cuando se verifica que $E[\hat{x}] = x$ y por el contrario, cuando tiene un determinado sesgo β , es porque se verifica que $E[\hat{x}] = \beta + x$.

Apéndice B

Ley de propagación de las varianzas-covarianzas

El siguiente desarrollo está extraído de la página 232 de la referencia [De la Puente, 2011] con el título “*Ley de propagación de las varianzas-covarianzas*”:

“Se trata ahora de forma análoga a lo anterior, de deducir la matriz de varianzas-covarianzas de un **vector** variable y , que es una función lineal de otro x , conociendo la matriz de varianzas-covarianzas de este último.

La función será del tipo:

$$y = a_0 + Ax$$

Donde \vec{a}_0 es un vector de constantes y A es una matriz de constantes, y conocemos la matriz de varianzas-covarianzas de $x \rightarrow \Sigma_{xx}$.

Aplicando la ley de propagación de la media, deducimos la ley:

$$\begin{aligned}\Sigma_{yy} &= \\ &= E[(y - E[y])(y - E[y])^T] = \\ &= E[(y - a_0 - AE[x])(y - a_0 - AE[x])^T] = \\ &= E[(Ax - AE[x])(Ax - AE[x])^T] = \\ &= AE[(x - E[x])(x - E[x])^T]A^T = \\ &= A\Sigma_{xx}A^T\end{aligned}$$

Queda finalmente la ley de propagación de varianzas-covarianzas, que emplearemos frecuentemente:”

$$\boxed{\Sigma_{yy} = A\Sigma_{xx}A^T} \quad (\text{B.1})$$

Con este resultado es fácil deducir que la misma ley se puede aplicar a las matrices **cofactor**. Dado que, por definición $\Sigma_{yy} = \sigma_0^2 Q_{yy}$ y $\Sigma_{xx} = \sigma_0^2 Q_{xx}$, la ley de propagación en función de las matrices cofactor queda de la forma siguiente:

$$\boxed{Q_{yy} = AQ_{xx}A^T} \quad (\text{B.2})$$

Apéndice C

Mejor estimación en sistemas compatibles indeterminados

La condición de partida es el siguiente sistema de ecuaciones compatible indeterminado, por tanto, con menos ecuaciones que incógnitas:

$$Cx = t$$

De las infinitas soluciones, en este apartado se tratará de obtener aquella que haga mínima la norma de la solución:

$$\|x\|_{\text{mínima}} = (x^T x)_{\text{mínima}}$$

El problema se reduce a la determinación de los extremos condicionados de la función $T(x) = (x^T x)$ con la condición $Cx - t = 0$. Es decir:

$$T(x, \lambda) = x^T x - 2\lambda^T (Cx - t)$$

Donde λ es el vector llamado de los multiplicadores de Lagrange. La condición de mínimo se resuelve aplicando derivadas parciales:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = 2\hat{x}^T - 2\lambda^T C = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \lambda} = 2(C\hat{x} - t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \hat{x}^T = \lambda^T C \\ C\hat{x} - t = 0 \end{cases}$$

El sistema se resuelve sustituyendo $\hat{x} = C^T \lambda$ en

$$C\hat{x} - t = 0$$

obteniéndose:

$$CC^T \lambda - t = 0$$

Como CC^T es simétrica y definida positiva resulta:

$$\lambda = (CC^T)^{-1}t$$

Finalmente se obtiene la ecuación que hace mínima la norma de las incógnitas \hat{x} :

$$\boxed{\hat{x} = C^T \lambda = C^T (CC^T)^{-1}t} \quad (\text{C.1})$$

Apéndice D

Algunas propiedades de la traza y la esperanza matemática

El presente apéndice está extraído de la página 233 de la referencia [De la Puente, 2011] con el título “*Algunas propiedades de la traza y la esperanza matemática*”:

“Vamos a demostrar algunas propiedades de la traza y la esperanza matemática que son necesarias para comprender la formulación empleada en MMCC.

Si el producto de 2 matrices A y B es una matriz cuadrada

$$\boxed{Tr(AB) = Tr(BA)} \quad (D.1)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} Tr(A_{m \times n} B_{n \times m}) &= \\ &= Tr \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} \right] = \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2}) \cdots + \\ &+ \cdots + (a_{m1}b_{1m} + a_{m2}b_{2m} + \cdots + a_{mn}b_{nm}) = \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + \cdots + a_{m1}b_{1m}) + (a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{m2}b_{2m}) \cdots + \\ &+ \cdots + (a_{1n}b_{n1} + a_{2n}b_{n2} + \cdots + a_{mn}b_{nm}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= Tr \left[\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \right] = \\
&= Tr(B_{n \times m} A_{m \times n})
\end{aligned}$$

Otra propiedad que emplearemos es

$$\boxed{Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)} \quad (D.2)$$

Propiedad que es inmediato comprobar.

La traza y la esperanza matemática

$$\begin{aligned}
Tr(E[A]) &= Tr \begin{pmatrix} E[a_{11}] & E[a_{12}] & \cdots & E[a_{1m}] \\ E[a_{21}] & E[a_{22}] & \cdots & E[a_{2m}] \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ E[a_{m1}] & E[a_{m2}] & \cdots & E[a_{mm}] \end{pmatrix} = \\
&= E[a_{11}] + E[a_{22}] + \cdots + E[a_{mm}] = E[a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{mm}] = E[Tr(A)]
\end{aligned}$$

por lo tanto”

$$\boxed{Tr(E[A]) = E[Tr(A)]} \quad (D.3)$$

Apéndice E

Fórmula de la transmisión de errores

Este apartado está extraído de la página 215 de la referencia [De la Puente, 2011] con el título “Fórmula de la transmisión de errores”.

“Sea $x = F(A, B, C)$ una cantidad función de las cantidades medidas A, B y C .

Sean emc_a , emc_b y emc_c los errores medios cuadráticos de las medidas A, B y C .

Nos proponemos encontrar el emc_x en función de emc_a , emc_b y emc_c .

Asimilando los errores a diferenciales y aplicando el concepto de diferencial total¹ para cada medida:

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{\partial F}{\partial A} dA_1 + \frac{\partial F}{\partial B} dB_1 + \frac{\partial F}{\partial C} dC_1 \\ dx_2 &= \frac{\partial F}{\partial A} dA_2 + \frac{\partial F}{\partial B} dB_2 + \frac{\partial F}{\partial C} dC_2 \\ &\dots = \dots \\ dx_n &= \frac{\partial F}{\partial A} dA_n + \frac{\partial F}{\partial B} dB_n + \frac{\partial F}{\partial C} dC_n \end{aligned}$$

Por definición de emc :

¹Puede verse en la página 283 de la referencia [Mena 2, 1997]

$$\begin{aligned}
emc^2 &= \frac{\sum dx_i^2}{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)^2 \frac{(dA_1)^2 + (dA_2)^2 + \dots + (dA_n)^2}{n} + \\
&+ \left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)^2 \frac{(dB_1)^2 + (dB_2)^2 + \dots + (dB_n)^2}{n} + \\
&+ \left(\frac{\partial F}{\partial C}\right)^2 \frac{(dC_1)^2 + (dC_2)^2 + \dots + (dC_n)^2}{n} + \\
&+ 2 \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right) \left(\frac{\partial F}{\partial B}\right) \frac{dA_1 dB_1 + \dots}{n} + 2 \left(\frac{\partial F}{\partial B}\right) \left(\frac{\partial F}{\partial C}\right) \frac{dB_1 dC_1 + \dots}{n} + \\
&+ 2 \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right) \left(\frac{\partial F}{\partial C}\right) \frac{dA_1 dC_1 + \dots}{n} + \dots
\end{aligned}$$

Los términos $dA_1 dB_1 + \dots$ son sensiblemente nulos, puesto que a cada valor de $dA_1 dB_1$, le corresponde otro valor de signo contrario, anulándose entre sí. Igualmente podemos razonar al respecto de los $dB_1 dC_1$ y $dA_1 dC_1$

Además tenemos que:

$$\begin{aligned}
emc_a^2 &= \frac{(dA_1)^2 + (dA_2)^2 + \dots + (dA_n)^2}{n} \\
emc_b^2 &= \frac{(dB_1)^2 + (dB_2)^2 + \dots + (dB_n)^2}{n} \\
emc_c^2 &= \frac{(dC_1)^2 + (dC_2)^2 + \dots + (dC_n)^2}{n}
\end{aligned}$$

De donde finalmente:

$$\boxed{emc_x^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)^2 emc_a^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)^2 emc_b^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial C}\right)^2 emc_c^2} \quad (E.1)$$

La fórmula (E.1) es de amplia aplicación para obtener el error teórico en los métodos topográficos, como se verá oportunamente.”

Bibliografía

Referencias

- [Chueca et al 1996] CHUECA, M., HERRÁEZ, J. y BERNÉ, J.L.(1996). *Tratado de Topografía 3. Redes topográficas y locales. Microgeodesia*. Madrid: Paraninfo.
- [Sevilla, 2005] Sevilla de Lerma, Miguel J. (2005). *Ajuste de redes libres. Modelos matemáticos singulares*. Instituto de Astronomía y Geodesia. Madrid: Publicación núm. 200. Centro mixto C.S.I.C.-U.C.M.
- [De la Puente, 2011] Tcol. GM. De la Puente Maroto, Javier. (2011). *Topografía Clásica. Métodos de ajuste de redes. Curso de Geodesia*. Escuela de Guerra del Ejército. Departamento de Geodesia y Topografía.
- [Miguel Castro, 2004] Cte. GM. Miguel Castro, Óscar Luis. (2004). *Compensación de redes libres. Solución con matriz seudoinvertida. Tesina fin del XXVI Curso de Geodesia, dirigida por el Tcol. GM. Javier de la Puente Maroto*.
- [Martín, 2010] Cor. GM. Martín Sanchez, Antonio. (2010) *Guía de iniciación a LaTeX*. Escuela de Guerra del Ejército. Departamento de Geodesia y Topografía.
- [Otero, 1998] J. Otero (1998). *Generalized Inverse Matrices and the Gauss-Markov Theorem*. Instituto de Astronomía y Geodesia. Madrid: Publicación núm. 192. Centro mixto C.S.I.C.-U.C.M.
- [Rao-Mitra, 1971] Rao, C.R., Mitra, S.K. (1971). *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*. John-Wiley.
- [Penrose, 1955] R. Penrose. (1955). *A generalized inverse for matrices*. Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 51, pp 406-413.

- [Mena, 2000] MENA BERRIOS, J.M (2000). *Geodesia matemática. Geometría del elipsoide de revolución*. Madrid: Servicio Geográfico del Ejército.
- [Mena 2, 1997] MENA BERRIOS, J.M (1997). *Teoría del tratamiento matemático de las mediciones experimentales*. Madrid: Servicio Geográfico del Ejército.
- [Márquez] Márquez, Raul. *Sistemas lineales inconsistentes y ajuste de redes GPS*. Universidad Nacional de San Juan. Departamento de Ingeniería en Agrimensura.
- [DMA, 1989] Defense Mapping Agency (DMA). *The Universal Grids: Universal Transverse Mercator (UTM) and Universal Polar Stereographic (UPS)*. Defense Mapping Agency Technical Manual (DMATM) 8358.2.
- [IAG, 1979] International Association of Geodesy (IAG). *Geodetic Reference System 1980*. General Assembly 1979 of the IAG.

Direcciones Web

- [<http://digilander.libero.it/foxes>] Dirección con enlace para la descarga de: *MATRIX and LINEAR ALGEBRA Package For EXCEL*.
Último acceso 24/04/2012
-